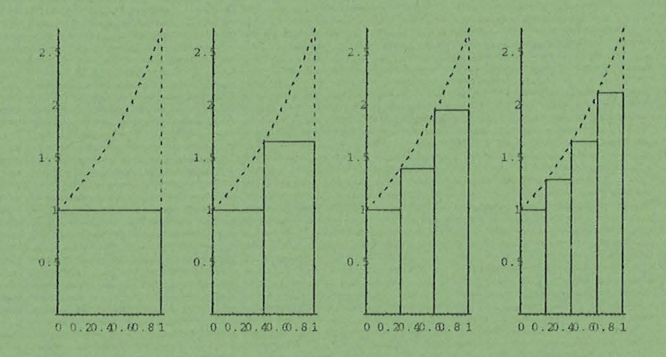
# LA INTEGRAL SIMPLE

*por*

MIGUEL DE UNAMUNO ADARRAGA



**CUADERNOS**
**DEL INSTITUTO**
**JUAN DE HERRERA**
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
*DE MADRID*

**3-07-05**

# LA INTEGRAL SIMPLE

*por*

MIGUEL DE UNAMUNO ADARRAGA

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
*DE MADRID*

3-07-05

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
*JUAN DE HERRERA*

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

**NUEVA NUMERACIÓN**

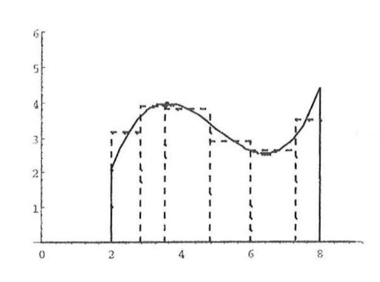
3 Área
07 Autor
05 Ordinal de cuaderno (del autor)

***La integral simple***

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Pablo Vegas González.
CUADERNO 144.01 / 3-07-05
ISBN: 84-9728-060-1
Depósito Legal: M-11300-2003

# I - La integral simple

El cálculo integral en una variable nació (s. XVII, Leibniz y Newton con independencia uno de otro) ante el problema de la medida de un área encerrada por una curva. Si se parte de la medida del área de un rectángulo como producto de las longitudes de sus lados, y se divide en bandas, mediante paralelas al eje *OY*, el área encerrada por la gráfica de una función positiva y el eje *OX* entre dos valores *a* y *b* de la variable, sumando luego las áreas de los rectángulos obtenidos sustituyendo la curva, en cada subintervalo, por la recta $y = \mu$, siendo $\mu$ un cierto *valor medio* de la función en él (ver figura), tendremos una aproximación de dicha área, tanto mejor cuanto mayor sea el número de bandas. Esto es un primer bosquejo de la idea de integral (Integral de Riemann) que pasamos a construir.




### Particiones de un intervalo

Dado un intervalo $I = [a, b]$ de la recta real, llamaremos en lo que sigue *partición* de $I$ a un conjunto finito de puntos de $I$ que incluye los extremos $a$ y $b$ y que escribiremos siempre en orden creciente; es decir, $p = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, con $x_0 = a$, $x_n = b$ y $x_{k-1} < x_k$ para todo $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Quedarán así definidos $n$ subintervalos de $I$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

### Sumas de Darboux

Sean $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, con $I = [a, b]$, una función *acotada*, y $p$ una partición de $I$. En cada subintervalo $I_k$ $f$ tendrá, en virtud de la acotación, un supremo y un ínfimo: $M_k = \sup_{x \in I_k} f(x)$ y $m_k = \inf_{x \in I_k} f(x)$. Formemos las sumas

$$S(p) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k, \qquad s(p) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) m_k ;$$

evidentemente, cualquiera que sea $p$,

$$s(p) \le S(p)$$

(intuitivamente $s(p)$ y $S(p)$ pueden visualizarse como aproximaciones, *por defecto y por exceso* respectivamente, del *área* del recinto de que hablábamos más arriba).

Es fácil demostrar que esta desigualdad entre las sumas $s(p)$ y $S(p)$ correspondientes a una misma partición $p$ se verifica igualmente para particiones distintas, es decir, que si son $p$ y $q$ dos particiones distintas cualesquiera de $I$, es también

$$s(p) \le S(q).$$

Veamos la demostración. Decimos que una partición $p'$ es *más fina* que otra $p$ si $p \subset p'$. Sea por ejemplo $p$ como más arriba, y $p' = (x_0, t, x_1, \cdots, x_n)$. Será

$$S(p) = (x_1 - x_0) M_1 + \sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k,$$

$$S(p') = (t - x_0) M_{11} + (x_1 - t) M_{12} + \sum_{k=2}^{n} (x_k - x_{k-1}) M_k,$$

donde

$$M_{11} = \sup_{x_0 \le x \le t} f(x) \quad \text{y} \quad M_{12} = \sup_{t \le x \le x_1} f(x),$$

y como, por la propia definición de supremo y por ser $[x_0, x_1] = [x_0, t] \cup [t, x_1]$ es $M_{11} \le M_1$, $M_{12} \le M_1$, resulta

$$S(p') \le S(p),$$

y con un razonamiento análogo,

$$s(p') \ge s(p).$$

Si $p' - p$ contuviera un punto en otra posición, o varios puntos, podríamos razonar de forma parecida o reiterar el razonamiento, con lo que las dos últimas desigualdades se aplican a cualquier par de particiones $p$ y $p'$ siendo la segunda más fina que la primera. Sean ahora $p$ y $q$ dos particiones cualesquiera de $I$; la partición que contiene todos los puntos de una y otra, $p \cup q$, es evidentemente más fina que ambas, luego según todo lo anterior se verificará

$$s(p) \le s(p \cup q) \le S(p \cup q) \le S(q). \;\blacksquare$$

## Integrales superior e inferior

Según lo anterior, si $f$ es una función acotada en un intervalo $I = [a, b]$ y $\mathscr{P}(I)$ el conjunto de las infinitas particiones de $I$, el conjunto

$$\{S(p) | p \in \mathscr{P}(I)\}$$

es inferiormente acotado ($s(p)$ es una cota inferior, siendo $p$ una partición cualquiera), luego tiene un *ínfimo*, al que llamamos *integral superior de f en I*,

$$\overline{\int_a^b} f = \inf \{S(p) | p \in \mathscr{P}(I)\}.$$

De forma semejante, el conjunto

$$\{s(p) | p \in \mathscr{P}(I)\}$$

resulta ser superiormente acotado por cualquiera de las $S(p)$ ; su *supremo* es la *integral inferior de f en I*,

$$\underline{\int_a^b} f = sup \{s(p) | p \in \mathscr{P}(I)\}.$$

Es evidente, después de toda la construcción anterior, que

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f .$$

**Función integrable. Integral de una función en un intervalo**

*Definición.* Sea *f* una función acotada en un intervalo $I = [a, b]$. Decimos que *f* es *integrable* (en el sentido de Riemann; a partir de ahora diremos integrable sin más) en *I* si se verifica que

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f ;$$

a este número real se le llama entonces *integral de f en I*, designándolo

$$\int_a^b f , \quad \text{o bien} \quad \int_a^b f(x)dx .$$

*Observaciones.* De la definición se desprende que la integral de una función *f* en un intervalo *I* es un *número real* que depende de tres cosas: la función *f* y los extremos del intervalo, *a* y *b*; la primera notación es, pues, la más natural en principio. Sin embargo, hay razones históricas y de cálculo para la segunda. Las históricas vienen de Leibniz, que encaró el problema de la integral como suma *S* de productos de áreas de rectángulos, de base *dx* y altura $f(x)$; de hecho, el signo $\int$ no es más que una *S* estilizada. Las razones de cálculo son que esa notación permite definir la función *f* en la propia expresión de la integral sin necesidad de hacerlo previamente, y otras que veremos en su momento, como al hablar del cambio de variable.

También hay que observar que, desde luego,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(w)dw \ldots$$

*Ejemplo 1.* Sea la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ , siendo *a*, $b > a$ y *c* reales cualesquiera. Es inmediato que, para toda partición *p* del intervalo y todo valor del índice *k* es $M_k = m_k = c$ , luego $S(p) = s(p) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) c = (b-a)c$ , $\overline{\int_a^b} f = inf\{(b-a)c\} = (b-a)c$ , $\underline{\int_a^b} f =$ $= sup\{(b-a)c\} = (b-a)c$; *f* es integrable e $\int_a^b f = (b-a)c$ (¡lo que, para $c > 0$ , equivale a redescubrir el área del rectángulo!).

*Ejemplo 2*. Sea ahora $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1$ si $x\in\mathbb{Q}$, $f(x)=0$ en otro caso (función de Dirichlet). Para toda partición $p$ del intervalo y todo valor del índice $k$ es ahora $M_k=1$, $m_k=0$, es decir, $S(p)=b-a$, $s(p)=0$, $\overline{\int_a^b} f=b-a$, $\underline{\int_a^b} f=0$ : $f$ *no* es integrable.

**Primeras propiedades de la integral**

1) *Linealidad*. Si $f$ y $g$ son funciones integrables en un intervalo $I=[a,b]$, y $\lambda$ y $\mu$ son números reales, entonces la función $\lambda f+\mu g$ es integrable en $I$ y se verifica que

$$\int_a^b \lambda f+\mu g=\lambda\int_a^b f+\mu\int_a^b g.$$

2) *Aditividad respecto del intervalo*. Si $f$ es una función integrable en un intervalo $I=[a,b]$ y $c\in(a,b)$, entonces $f$ es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$, verificándose que

$$\text{(I)}\qquad \int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

Por definición, hacemos $\int_b^a f=-\int_a^b f$ (con lo que $\int_a^a f=0$). Resulta entonces que (I) puede escribirse

$$\int_a^c f=\int_a^b f-\int_c^b f=\int_a^b f+\int_b^c f,$$

es decir, la igualdad (I) (*fórmula de Chasles*) es cierta aunque $c$ sea exterior al intervalo $[a,b]$ (siempre que $f$ sea integrable en el intervalo más amplio, naturalmente).

Admitiremos estas propiedades sin demostración (sería tan sencilla en cuanto a las ideas como farragosa en cuanto a la expresión).

**Algunos tipos de funciones integrables**

A nuestro nivel no es posible contestar a la pregunta: ¿qué condición necesaria y suficiente ha de cumplir una función para ser integrable? Sin embargo, sí podemos identificar dos familias muy amplias de funciones de las que sabemos que lo son. De ello se ocupan los dos siguientes teoremas, que admitiremos sin demostración.

*Teorema*. Si una función $f$ es, en un intervalo, *acotada y continua excepto quizá en un conjunto finito de puntos*, entonces es integrable en dicho intervalo.

*Teorema*. Si una función $f$ es *monótona* en un intervalo, entonces es integrable en él.

**La integral como límite**

Hemos construido la noción de integral mediante las sumas de Darboux. Hay otro modo, parecido pero no idéntico, de llegar al mismo concepto.

*Definición*. Dada una función *f* en un intervalo $I=[a,b]$, y una partición *p* de éste, llamaremos *suma de Riemann* de *f* correspondiente a *p* a una suma

$$\varphi(p)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})\mu_k,$$

donde, para cada *k*, $m_k \le \mu_k \le M_k$ (naturalmente, hay en general infinitas maneras de elegir este valor $\mu_k$, y por lo tanto infinitas sumas de Riemann posibles para cada partición).

*Definición*. Dada una partición *p* de un intervalo $[a,b]$, llamamos *diámetro* de *p* a la máxima amplitud de los subintervalos definidos por *p*:

$$d(p)=\max_{k\in\{1,\cdots,n\}}\{x_k-x_{k-1}\}.$$

Pues bien, se demuestra el siguiente

*Teorema*. Si *f* es integrable en un intervalo $I=[a,b]$, entonces para todo real $\varepsilon>0$ existe un real $\delta>0$ tal que, si *p* es una partición de *I* de diámetro $d(p)<\delta$ y $\varphi(p)$ es cualquier suma de Riemann de *p*, se verifica que

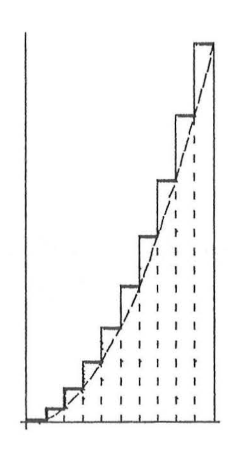
$$\left|\int_a^b f-\varphi(p)\right|<\varepsilon;$$

y recíprocamente, si dada *f* definida en *I* existe un número real *J*, con la propiedad de que para todo real $\varepsilon>0$ existe un real $\delta>0$ tal que, si *p* es una partición de *I* de diámetro $d(p)<\delta$ y $\varphi(p)$ es cualquier suma de Riemann correspondiente a *p*, se cumple que $|J-\varphi(p)|<\varepsilon$, entonces *f* es integrable en *I*, e

$$\int_a^b f=J.$$

Todo esto lo podemos expresar diciendo que

$$\int_a^b f=\lim_{d(p)\to 0}\varphi(p).$$



*Ejemplo 1*. Sea la función $f:[0,a]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, integrable por ser continua. Calculemos su integral como límite de sumas de Riemann. Consideraremos un tipo particular de particiones, las que podríamos llamar regulares, consistentes en dividir el intervalo en *n* partes iguales:

$$p_n=\left\{0,\frac{a}{n},\frac{2a}{n},\cdots,\frac{(n-1)a}{n},a\right\}.$$

En cada subintervalo $I_k=\left[\frac{(k-1)a}{n},\frac{ka}{n}\right]$ tomaremos como $\mu_k$ el valor de *f* en uno de los extremos, el mayor por ejemplo:

$$\mu_k = f\left(\frac{ka}{n}\right) = \frac{k^2a^2}{n^2}$$

(en la figura se representa el caso $n = 10$), con lo que la suma de Riemann correspondiente será

$$\varphi(p_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a}{n}\frac{k^2a^2}{n^2} = \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Es claro que, para estas particiones, $d(p) \to 0$ equivale a $n \to \infty$, así como que, puesto que existe el límite de todas las sumas de Riemann posibles por ser $f$ integrable, dicho límite coincidirá con el de sólo las particiones $p_n$ consideradas. Luego

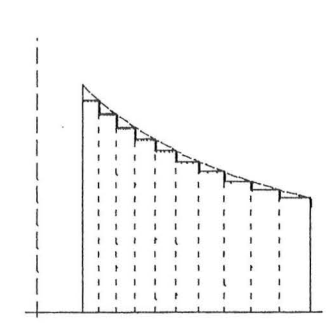
$$\int_0^a f = \int_0^a x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{a^3}{3}.$$

Si se tratara de un intervalo cualquiera $[a, b]$, en virtud de las propiedades ya vistas sería

$$\int_a^b f = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

*Ejemplo 2.* Sea ahora la función $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, función continua y por lo tanto integrable. Consideraremos también un tipo particular de particiones, las definidas así:

$$p_n = \{1, \lambda, \lambda^2, \cdots, \lambda^n = 2\},$$



siendo naturalmente $\lambda = 2^{\frac{1}{n}}$. En cada subintervalo $I_k = [\lambda^{k-1}, \lambda^k]$ tomaremos como $\mu_k$ el valor de $f$ en el extremo mayor:

$$\mu_k = f(\lambda^k) = \frac{1}{\lambda^k},$$

con lo que la suma de Riemann correspondiente será

$$\varphi(p_n) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda^k - \lambda^{k-1})\frac{1}{\lambda^k} = \sum_{k=1}^{n} (1 - \lambda^{-1}) = (1 - \lambda^{-1})n;$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \lim_{n\to\infty}\left(1 - 2^{-\frac{1}{n}}\right)n = -\lim_{n\to\infty} n \log\left(2^{-\frac{1}{n}}\right) = \log 2.$$

Desde luego, en los dos ejemplos vistos habríamos podido calcular la integral también mediante sumas de Darboux: de hecho, las sumas de Riemann elegidas coinciden con las sumas $S(p)$ en el primer ejemplo y $s(p)$ en el segundo.

**Otras propiedades de la integral**

1) *Positividad.* Si $f$ es integrable y positiva en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f \geq 0;$$

basta ver que para toda partición $p$ del intervalo es $s(p) \geq 0$.

2) *Orden.* Como consecuencia de la propiedad anterior y de la linealidad, si $f$ y $g$ son integrables en $[a,b]$ y $f \leq g$, entonces

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g,$$

ya que la integral de $g - f$ será positiva.

3) *Valor absoluto y desigualdad triangular.* Si $f$ es integrable en $[a,b]$, es fácil razonar que su valor absoluto lo es también; además, de

$$-|f| \leq f \leq |f|$$

resulta, según lo anterior,

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

o lo que es equivalente,

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|;$$

es la llamada *desigualdad triangular*, análoga a la habitual pero sustituyendo suma por integral.

**Teoremas de la media**

*Teorema.* Si es $f$ integrable (y como tal acotada) en $I$, y son $M = \sup_{x\in I} f(x)$, $m = \inf_{x\in I} f(x)$, entonces existe un real $\mu$, con $m \leq \mu \leq M$, tal que

$$\int_a^b f = (b-a)\mu;$$

$\mu$ es el llamado *valor medio integral*, o *media integral*, de $f$ en $I$.

*Demostración.* De $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in I$ resulta

$$\int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M,$$

o lo que es lo mismo, según lo visto en el *Ejemplo 1* para funciones constantes,

$$(b-a)m \le \int_a^b f \le (b-a)M, \quad m \le \frac{\int_a^b f}{b-a} \le M,$$

y llamando

$$\mu = \frac{\int_a^b f}{b-a}$$

resulta el teorema. ■

*Caso particular.* Si $f$ es continua, sabemos que existe un $\xi \in I$ tal que $\mu = f(\xi)$, y la fórmula del valor medio toma entonces la forma

$$\int_a^b f = (b-a)f(\xi), \text{ con } \xi \in I.$$

*Teorema.* Si $g$ y $f \cdot g$ son integrables en $I$ y $g$ no cambia su signo en el intervalo, siendo $f$ acotada, $M = \sup_{x \in I} f(x)$, $m = \inf_{x \in I} f(x)$, entonces existe un real $\mu$, con $m \le \mu \le M$, tal que

$$\int_a^b f \cdot g = \mu \int_a^b g.$$

*Demostración.* Supongamos que $g$ es positiva. De $m \cdot g \le f(x) \cdot g(x) \le M \cdot g$ resulta, teniendo en cuenta todo lo anterior,

$$m\int_a^b g \le \int_a^b f \cdot g \le M\int_a^b g,$$

y dividiendo por $\int_a^b g$ (supuesta no nula; si lo fuera el teorema se verificaría trivialmente) resultará

$$m \le \frac{\int_a^b f \cdot g}{\int_a^b g} \le M,$$

y bastará, como antes, llamar

$$\mu = \frac{\int_a^b f \cdot g}{\int_a^b g}.$$

Lo mismo si $g$ fuera negativa, sin más que cambiar el sentido de las primeras desigualdades. ■

*Caso particular.* Igual que más arriba, si $f$ es continua la fórmula quedará

$$\int_a^b f \cdot g = f(\xi)\int_a^b g, \text{ con } \xi \in I.$$

**Media integral y media aritmética**

Sea *f* integrable en $I=[a,b]$ y sean $x_0=a$, $x_1$, $x_2$, ... , $x_n=b$ valores *equidistantes* de *x* en *I*. Tenemos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}f(x_k)}{n}=\frac{1}{b-a}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_k)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f,$$

ya que la suma que aparece en el segundo miembro es una suma de Riemann de *f* en *I*, para la partición regular

$$p_n=\{x_0=a,x_1,x_2,\cdots,x_n=b\},$$

en la que $x_k-x_{k-1}=\dfrac{b-a}{n}$; es decir, hemos demostrado que *la media integral es el límite de la media aritmética* de *n* valores de la función en puntos equidistantes.

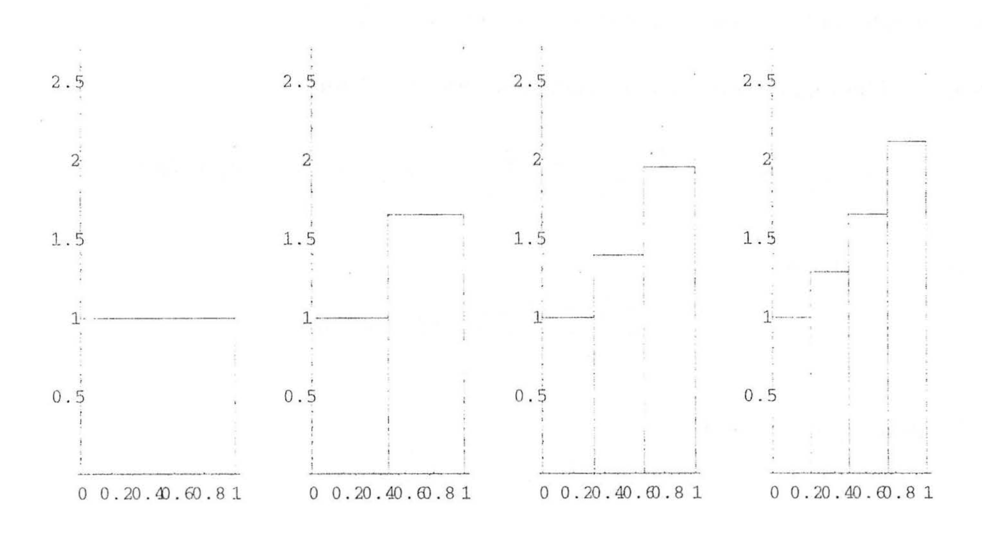
*Ejemplo.* Supongamos que queremos calcular el límite de la sucesión de término general

$$u_n=\frac{1+e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\cdots+e^{\frac{n-2}{n}}+e^{\frac{n-1}{n}}}{n};$$

$u_n$ es la media aritmética de los *n* valores de la función $f(x)=e^x$ en los valores equidistantes 0, $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, ... , $\frac{n-2}{n}$ y $\frac{n-1}{n}$, que dividen en *n* partes el intervalo $[0,1]$; luego

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\int_0^1 e^x dx,$$

cuyo valor, como veremos pronto, es $e-1$.




En la figura se representan gráficamente (en cada caso como área total del conjunto de rectángulos) los cuatro primeros términos de la sucesión:

$$u_1 = 1,\ u_2 = \frac{1}{2} + \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2},\ u_3 = \frac{1}{3} + \frac{e^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{e^{\frac{2}{3}}}{3},\ u_4 = \frac{1}{4} + \frac{e^{\frac{1}{4}}}{4} + \frac{e^{\frac{2}{4}}}{4} + \frac{e^{\frac{3}{4}}}{4}.$$

**Integral de extremo variable. Teorema fundamental**

Si $f$ es integrable en $I = [a,b]$, hemos visto que lo es en cualquier intervalo $[a,x]$, con $a \le x \le b$; esto nos permite definir una función

$$g : I \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \int_a^x f.$$

*Teorema.* Para toda función *f* integrable en un intervalo $I = [a,b]$, la función $g$ que acabamos de definir es continua en *I*.

*Demostración.* Sea $x_0$ un punto cualquiera de *I* y *h* tal que $x_0 + h \in I$. Será

$$g(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{x_0+h} f = g(x_0) + h\mu,$$

con $\inf_{x\in I} f(x) \le \mu \le \sup_{x\in I} f(x)$ (por el teorema de la media); y tomando límites para $h \to 0$, al ser $\mu$ acotado,

$$\lim_{h\to 0} g(x_0 + h) = g(x_0),$$

y $g$ es continua en $x_0$, es decir, en *I*. ■

*Teorema.* Si *f* es continua en $I = [a,b]$, la función $g$ recién definida es derivable en *I*, y

$$g' = f.$$

Este es el llamado *teorema fundamental del cálculo integral.*

*Demostración.* Operando como en el teorema anterior, será ahora

$$g(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^{x_0+h} f = g(x_0) + h\, f(x_0 + \theta h),$$

con $0 \le \theta \le 1$, de donde

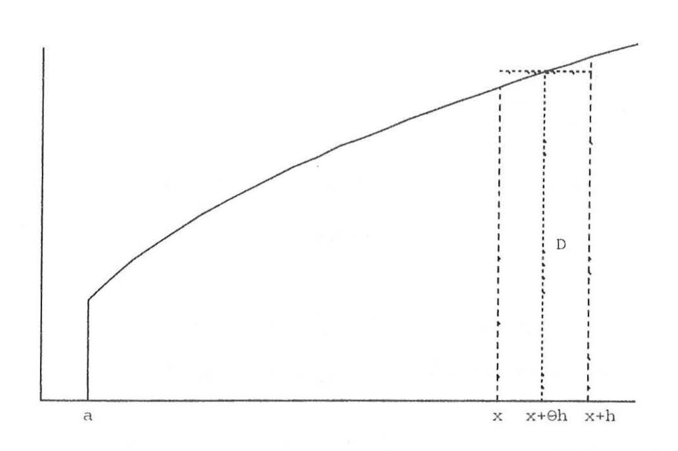
$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = f(x_0 + \theta h),$$

y tomando límites para $h \to 0$,

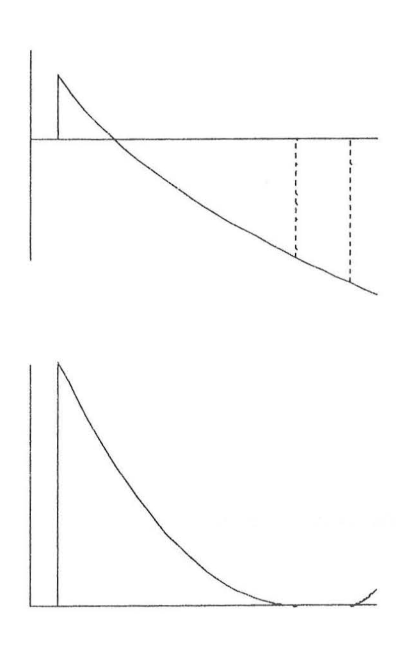
$$g'(x_0) = f(x_0)$$

por la continuidad de *f*; es decir,

$$g' = f.\ ■$$




La figura ilustra el teorema. La curva es la gráfica de una función continua *f*, el área entre la curva, el eje *OX* y las ordenadas correspondientes a los valores *a* y *x* de la variable es el valor de $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, y el área *D*, entre las ordenadas *x* y $x+h$, es el valor de $g(x+h)-g(x)$, igual al área de un rectángulo de base *h* y altura $f(x+\theta h)$, con lo que este último valor $f(x+\theta h)$ es igual a $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$; al tender *h* a 0 esta ordenada correspondiente a $x+\theta h$ tiende a coincidir con la correspondiente a *x*; o bien: el límite $g'(x)$ de aquel cociente es igual, por la continuidad de *f*, a $f(x)$.



Esta misma figura y las dos siguientes intentan hacer intuitivo el resultado del teorema. El área *D con el signo que indique su posición por encima o por debajo del eje OX*, igual al producto $h\cdot f(x+\theta h)$, mide la *variación* de la integral (área) entre los puntos *x* y $x+h$; entonces, si $f(x)$ es positivo, *D* es positivo, es decir, *g está creciendo*, tanto más aprisa cuanto mayor sea $f(x)$; si $f(x)$ es negativo, *D* es negativo, es decir, *g está decreciendo*, tanto más aprisa también cuanto menor sea $f(x)$ (cuanto mayor sea $|f(x)|$); y si $f(x)$ fuera nulo entre *x* y $x+h$, *g* no cambiaría, *sería constante* en ese intervalo. En resumen, *f mide la variación de g*, que es la propiedad característica de la derivada $g'$ (en la segunda figura hay un punto en el que $f(x)=0$: ¿qué ocurre con *g* en ese punto?).

*Ejemplo.* Calculemos

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\int_2^x \frac{t}{\log t}\,dt}{\log\log x};$$

numerador y denominador son funciones derivables para $x>1$, y podemos utilizar la regla de l'Hôpital (es fácil razonar que el numerador tiene límite $-\infty$, como el denominador; ver *Ejemplo 2* pág. 12):

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\int_2^x \frac{t}{\log t}\,dt}{\log\log x}=\lim_{x\to 1+}\frac{\dfrac{x}{\log x}}{\dfrac{1}{x\log x}}=\lim_{x\to 1+}x^2=1.$$

**Primitivas de una función**

*Definición*. Dada una función *f*, llamamos *primitiva* de *f* a cualquier función *g* tal que $g' = f$.

El teorema fundamental implica que toda función continua *f* tiene una primitiva, la función *g* definida por $g(x) = \int_a^x f$, siendo *a* cualquier valor en el intervalo de definición de *f*.

Sabemos que, si $g$ y $h$ son dos funciones tales que, para todo $x \in I$, $h(x) = g(x) + cte$, entonces $h' = g'$; y recíprocamente, si $(h-g)'$ es la función nula, $(h-g)(x) = cte$. Luego

*si una función f admite una primitiva g, entonces admite infinitas, todas las funciones de la forma* $g + cte$.

**Regla de Barrow**

Sea *f* continua en $[a,b]$ y *g* una primitiva de *f*. Sabemos que ha de ser

$$g(x) = \int_a^x f + cte\,;$$

haciendo $x = a$,

$$g(a) = \int_a^a f + cte = cte\,,$$

es decir,

$$\int_a^x f = g(x) - g(a),$$

y particularizando $x = b$,

$$\int_a^b f = g(b) - g(a),$$

que es la llamada *regla de Barrow*, que permite calcular la integral de una función si se conoce una primitiva de la misma.

*Ejemplo 1*. Calculemos la integral vista en un ejemplo anterior.

$$\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1\,,$$

donde hemos utilizado el hecho de que la exponencial es primitiva de sí misma, y la muy habitual notación $\left[g(x)\right]_a^b$ para representar la diferencia $g(b) - g(a)$.

*Ejemplo 2. Comprobemos que*

$$\lim_{x \to 1^+} \int_2^x \frac{t}{\log t} dt = -\infty\,;$$

en efecto, aplicando un teorema de la media,

$$\int_2^x \frac{t}{\log t}dt = \int_2^x t^2 \frac{1}{t\log t}dt = \xi^2 \int_2^x \frac{1}{t\log t}dt\,,$$

con $1 < x \leq \xi \leq 2$; pero $\dfrac{1}{t\log t}$ es la derivada de $\log\log t$, luego, aplicando la regla de Barrow,

$$\lim_{x\to 1+} \int_2^x \frac{t}{\log t}dt = \lim_{x\to 1+} \xi^2 (\log\log x - \log\log 2) = -\infty\,,$$

por la acotación $1 < \xi^2$.

**Teorema del cambio de variable**

*Teorema.* Sea *f* continua en un intervalo *I*, y sea $\varphi : J \to I$, con $J = [t_0, t_1]$, una función de clase $C^1$; entonces se verifica que

$$\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_1)} f(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\cdot \varphi'(t)dt\,.$$

*Demostración.* Sea *g* una primitiva de *f*; será, según la regla de Barrow,

$$\int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t_1)} f(x)dx = g(\varphi(t_1)) - g(\varphi(t_0))\,.$$

Por otra parte, la derivada de la función compuesta $g\circ\varphi$ es $(g'\circ\varphi)\cdot\varphi' = (f\circ\varphi)\cdot\varphi'$, es decir, $g\circ\varphi$ es una primitiva de la función continua $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$, luego, otra vez según la regla de Barrow,

$$\int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt = [g\circ\varphi]_{t_0}^{t_1} = g\circ\varphi(t_1) - g\circ\varphi(t_0)\,,$$

y ambas integrales son iguales. ■

*Ejemplo.* De la definición de la integral de una función positiva resulta inmediatamente, aunque sea adelantar cuestiones, que dicha integral es la medida del área entre la gráfica de la función y el eje *OX*. Utilicémoslo para calcular el área de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,;$$

naturalmente, habrá que considerar la función positiva

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,,$$

cuya gráfica es la semielipse situada en el semiplano $y \geq 0$, y calcular el doble de su integral en su intervalo de definición $[-a, a]$; es decir, será

$$A = 2\int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Para calcular esta integral utilizaremos el teorema del cambio de variable, eligiendo como función para el cambio $\varphi : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-a, a]$, $\varphi(t) = a\,sen\,t$, que cumple todos los requisitos necesarios como es inmediato comprobar, resultando

$$A = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2\,sen^2\,t}\cdot a\,cos\,t\,dt = 2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\,t\,dt =$$

$$= ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos\,2t)\,dt = ab\left[t + \frac{sen\,2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi\,ab.$$

**Integración por partes**

*Teorema.* Sean $u$ y $v$ dos funciones de clase $C^1$ en un intervalo $I = [a, b]$; entonces

$$\int_a^b u\,v'\,dx = u\,v(b) - u\,v(a) - \int_a^b v\,u'\,dx,$$

o bien, con notación más frecuente,

$$\int_a^b u\,dv = [u\,v(x)]_a^b - \int_a^b v\,du.$$

*Demostración.* De la derivada del producto $u\,v$ resulta inmediatamente

$$u\,v' = (u\,v)' - v\,u'$$

y de aquí el resultado. ■

*Ejemplo 1.* Supongamos que queremos calcular

$$\int_0^{\pi} x\,sen\,x\,dx\,;$$

tomando $u = x$ y $dv = sen\,x\,dx$, con lo que $du = dx$ y $v = -cos\,x$, resulta

$$\int_0^{\pi} x\,sen\,x\,dx = [-x\,cos\,x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -cos\,x\,dx = \pi + [sen\,x]_0^{\pi} = \pi.$$

*Ejemplo 2.* Sea ahora

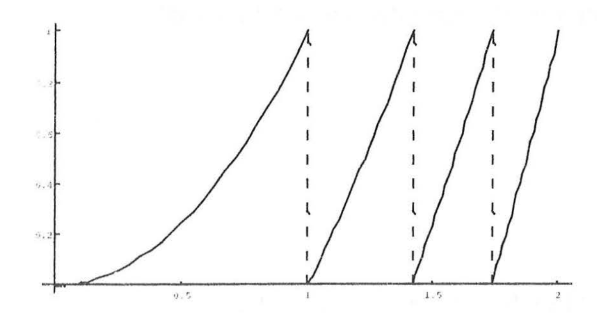
$$\int_2^3 log(x-1)\,dx\,;$$

no tenemos propiamente un producto de funciones, pero siempre podemos tomar $dv = dx$, con lo que $u = log(x-1)$, $du = \frac{dx}{x-1}$ y $v = x-1$ (observación: siempre hay infinitos valores posibles para *v*, pudiéndose elegir el más conveniente), resultando

$$\int_2^3 log(x-1)\,dx = \left[(x-1)\,log(x-1)\right]_2^3 - \int_2^3 dx = 2\,log\,2 - 1.$$

**La regla de Barrow para funciones con *n* discontinuidades de primera especie**

Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función discontinua en un conjunto finito de puntos, con límites laterales finitos en todos ellos (y por ende acotada). Para calcular su integral bastará aplicar la regla de Barrow a cada uno de los subintervalos en los que la función es continua. Un ejemplo lo aclarará.



*Ejemplo.* Sea la función $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - [x^2]$ (es decir $f(x)$ es la parte decimal de $x^2$). Esta función es discontinua en los puntos en que $x^2$ es entera, es decir, en $x = 1$, $x = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{3}$ y $x = 2$, y su valor es $x^2$ si $x \in [0,1)$, $x^2 - 1$ si $x \in [1,\sqrt{2})$, $x^2 - 2$ si $x \in [\sqrt{2},\sqrt{3})$, $x^2 - 3$ si $x \in [\sqrt{3},2)$, con $f(2) = 0$ finalmente; el cálculo de su integral por la regla de Barrow será

$$\int_0^2 f = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{\sqrt{2}} (x^2-1)\,dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} (x^2-2)\,dx + \int_{\sqrt{3}}^2 (x^2-3)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^{\sqrt{2}} + \left[\frac{x^3}{3} - 2x\right]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} + \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_{\sqrt{3}}^2 = -\frac{7}{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

*Observación.* Si tomamos los cuatro subintervalos como cerrados, como hemos hecho siempre al hablar de la integral, nos encontramos con una discontinuidad en un extremo de cada uno de ellos. Lo que hemos hecho, en rigor, es sustituir en cada subintervalo la función dada por otra que difiere de ella en un punto: la función $x^2$ en $[0,1]$, la $x^2 - 1$ en $[1,\sqrt{2}]$, etc. Esto es legítimo, porque si a una función integrable le cambiamos su valor en uno o varios puntos aislados, su integral sigue existiendo y teniendo el mismo valor; obsérvese que la diferencia entre ambas funciones sería nula en todos los puntos salvo en uno o varios puntos aislados, es decir, una función integrable y de integral nula: basta pensar que en ella, para toda partición *p* del intervalo, es $s(p) = 0$.

# II - Integrales impropias

Hasta ahora hemos hablado de la integral de una función *acotada* en un intervalo también *acotado*. Vamos a extender la definición a funciones e intervalos no acotados. El instrumento para ello será, naturalmente, el concepto de límite.

**Integrales en intervalo no acotado**

Sea $f$ una función definida en un intervalo $[a,\infty)$, e integrable en todo intervalo $[a,x]$ tal que $x > a$. Está definida entonces la función

$$g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \int_a^x f .$$

*Definición.* Decimos que la integral impropia $\int_a^\infty f$, o $\int_a^\infty f(x)\,dx$, es *convergente*, si y sólo si existe $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = l \in \mathbb{R}$; en dicho caso llamamos

$$\int_a^\infty f = l ;$$

en otro caso decimos que la integral es *divergente*.

*Ejemplo 1.* Sea

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx ;$$

para todo $x > 0$ es $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = arctg\, x$, y $\lim\limits_{x\to\infty} arctg\, x = \frac{\pi}{2}$; luego la integral estudiada es convergente y su valor es

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} .$$

En la práctica no hay inconveniente en utilizar la notación

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = [arctg\, x]_0^\infty = \frac{\pi}{2} ,$$

donde el superíndice no indica un *valor*, sino un *límite* de la primitiva entre corchetes.

*Ejemplo 2*. Sea ahora

$$\int_0^\infty cos\, x\, dx \;;$$

como $\int_0^x cos\, t\, dt = sen\, x$ y no existe $\lim_{x\to\infty} sen\, x$, la integral es divergente.

*Ejemplo 3*. Vamos a considerar la familia de integrales

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\rho} dx \quad (a > 0),$$

donde $\rho \in \mathbb{R}$. Sabemos que

$$\int_a^x \frac{1}{t^\rho} dt = \begin{cases} \left[ \dfrac{1}{(1-\rho)t^{\rho-1}} \right]_a^x = \dfrac{1}{1-\rho}\left( \dfrac{1}{x^{\rho-1}} - \dfrac{1}{a^{\rho-1}} \right) & \text{si } \rho \neq 1, \\ [log\, t]_a^x = log\, x - log\, a & \text{si } \rho = 1, \end{cases}$$

y el límite cuando $x \to \infty$ existe sólo para $\rho > 1$; es decir, *la integral es convergente si y sólo si* $\rho > 1$, siendo entonces su valor

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\rho} dx = \frac{1}{(\rho-1)a^{\rho-1}}.$$

Todo lo visto hasta aquí se aplica al caso en que tengamos $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ e $\int_{-\infty}^a f$, sin más que recordar que $\int_a^x f = -\int_x^a f$. Y si tenemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable en todo intervalo, entonces, por definición,

$$\int_{-\infty}^\infty f = \int_{-\infty}^a f + \int_a^\infty f,$$

si son convergentes estas dos últimas integrales (desde luego ni la convergencia ni el valor dependen del valor *a*, pues para cualquier otro *b* será

$$\int_{-\infty}^b f + \int_b^\infty f = \int_{-\infty}^a f + \int_a^b f + \int_b^a f + \int_a^\infty f = \int_{-\infty}^a f + \int_a^\infty f).$$

*Ejemplo*

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = [arctg\, x]_{-\infty}^\infty = \pi.$$

**Criterios de convergencia**

Puede interesar a veces decidir previamente si una integral es convergente o no, antes de abordar su cálculo. Vamos a ver a continuación algún criterio para ello, estableciendo previamente dos propiedades inmediatas:

a) el carácter (convergente o divergente) de $\int_a^{\infty} f$ no depende del valor de *a*, pues $\int_a^x f$ e $\int_b^x f$ difieren en una constante;

b) cualquiera que sea $\lambda \neq 0$ las integrales $\int_a^{\infty} f$ e $\int_a^{\infty} \lambda f$ tienen el mismo carácter.

Consideraremos en adelante el caso de funciones positivas para $x \geq a$: según las dos propiedades anteriores, todas los resultados serán válidos para funciones que no cambien de signo a partir de un valor de *x*.

*Teorema.* Si *f* y *g* son dos funciones positivas definidas en un intervalo no acotado $I = [a, \infty)$, integrables en $[a, x]$ para todo $x \in I$, *g* es mayorante de *f* y $\int_a^{\infty} g$ es convergente, entonces $\int_a^{\infty} f$ es convergente.

*Demostración.* Por ser *f* y *g* positivas sus integrales en $[a, x]$ crecen con *x*, y de $f(x) \leq g(x)$ para $a \leq x$ resulta $\int_a^x f \leq \int_a^x g \leq \int_a^{\infty} g$; es decir, $\int_a f$ es una función creciente y superiormente acotada en *I*, luego tiene límite para $x \longrightarrow \infty$. ■

Naturalmente, ello implica que si $\int_a^{\infty} f$ es divergente, también lo es $\int_a^{\infty} g$.

Como caso particular importante en la práctica, si existe $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}^*$, o lo que es lo mismo, si $f(x) \sim l \cdot g(x)$ para $x \longrightarrow \infty$, entonces las integrales de *f* y *g* tienen el mismo carácter. En efecto, como $l > 0$, a partir de un valor de *x* será

$$0 < \frac{l}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq 2l, \quad \text{o bien} \quad 0 < \frac{l}{2} g(x) \leq f(x) \leq 2l\, g(x),$$

y, salvo un factor constante, cada función es a la vez mayorante y minorante de la otra.

Si fuera $l = 0$, el criterio sería válido sólo en caso de convergencia, y si fuera $l = \infty$, sólo en caso de divergencia (¿por qué?).

Tomando $g(x) = \dfrac{1}{x^{\rho}}$ bastará encontrar un $\rho$ tal que exista $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{1/x^{\rho}} = \lim\limits_{x \to \infty} x^{\rho} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$ (o tal que $f(x) \sim \dfrac{l}{x^{\rho}}$ para $x \longrightarrow \infty$): entonces $\int_a^{\infty} f$ será convergente si y sólo si $\rho > 1$.

*Ejemplo 1.* Sea

$$\int_1^{\infty} \frac{\log x}{e^{\sqrt{x}}} dx;$$

como

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \frac{\log x}{e^{\sqrt{x}}} = 0,$$

la integral es convergente.

*Ejemplo 2.* Sea ahora

$$\int_a^\infty \frac{p(x)}{q(x)}dx\,,$$

donde la fracción racional del integrando es propia y acotada (es decir, $q(x)$ no se anula en el intervalo de integración); si son $m$ y $n$ los respectivos grados de numerador y denominador, será

$$\lim_{x\to 0} x^{n-m}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_m}{b_n} \in \mathbb{R}^*$$

con notación obvia, luego $\int_a^\infty \frac{p(x)}{q(x)}dx$ es convergente si y sólo si $m - n \geq 2$.

Si *f* no es positiva (es decir, si cambia de signo para valores de *x* arbitrariamente grandes), recordando la *propiedad triangular* de la integral (pág. 8) se deduce inmediatamente que, si $\int_a^\infty |f|$ es convergente (lo que se expresa también diciendo que $\int_a^\infty f$ es *absolutamente* convergente), entonces $\int_a^\infty f$ es convergente; sin que el recíproco sea cierto, desde luego. Como ejemplo, puesto que $\left|\frac{sen\,x}{x^r}\right| \leq \frac{1}{x^r}$, si $r > 1$ es convergente $\int_\pi^\infty \frac{sen\,x}{x^r}dx$. Pero si $r \leq 1$ sólo sabemos que la integral no es absolutamente convergente, pero podría ser convergente.

Es fácil demostrar el siguiente criterio (Dirichlet):

Si *f* es monótona y tiende a 0 para $x \to \infty$, y *g* es integrable en $[a,x]$ para todo $x \geq a$ siendo $\int_a^x g$ acotada, entonces $\int_a^\infty f \cdot g$ es convergente.

Con este criterio resulta inmediatamente la convergencia de $\int_\pi^\infty \frac{sen\,x}{x^r}dx$ para $r > 0$, por tender $\frac{1}{x^r}$ monótonamente a 0 y ser $\left|\int_\pi^x sen\,t\,dt\right| = \left|-cos\,x - 1\right| \leq 2$.

## Integrales de funciones no acotadas

Sea *f* una función definida y no acotada en $[a,b)$, integrable en todo intervalo $[a,x]$, con $a < x < b$; está definida la función

$$g : [a,b) \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \int_a^x f\,.$$

*Definición.* Decimos que la integral impropia $\int_a^b f$, o $\int_a^b f(x)\,dx$, es *convergente* si y sólo si existe $\lim_{x\to b} g(x) = l \in \mathbb{R}$, y en dicho caso llamamos

$$\int_a^b f = l ;$$

en otro caso decimos que la integral es *divergente*.

*Ejemplo 1*. Sea

$$\int_0^1 log(1-x)\,dx ;$$

la función $f:[0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=log(1-x)$ es continua, y por lo tanto integrable, en todo intervalo $[0,x]$, con $0<x<1$, pero no es acotada en $[0,1)$; tenemos:

$$\int_0^x log(1-t)\,dt = \left[(t-1)\,log(1-t)\right]_0^x + \int_0^x \frac{t-1}{1-t}\,dt = (x-1)\,log(1-x)-x ,$$

$$\lim_{x\to 1}\left((x-1)\,log(1-x)-x\right) = -1 ;$$

luego la integral es convergente y su valor es

$$\int_0^1 log(1-x)\,dx = -1 .$$

*Ejemplo 2*. Sea

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg\,x\,dx ;$$

es también una integral impropia como la anterior;

para $0<x<\dfrac{\pi}{2}$,

$$\int_0^x tg\,t\,dt = \left[-\,log\,cos\,t\right]_0^x = -\,log\,cos\,x ,\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(-\,log\,cos\,x\right) = \infty ,$$

luego la integral estudiada es divergente.

*Ejemplo 3*. Consideremos la familia de integrales

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\rho}\,dx \quad (0<a<b),$$

donde $\rho$ es un exponente real. Para $a<x<b$,

$$\int_a^x \frac{1}{(b-t)^\rho}\,dt = \begin{cases} \left[\dfrac{-(b-t)^{1-\rho}}{(1-\rho)}\right]_a^x = \dfrac{-1}{1-\rho}\left((b-x)^{1-\rho}-(b-a)^{1-\rho}\right) & \text{si } \rho\neq 1 , \\ -\left[log(b-t)\right]_a^x = -\,log(b-x)+log(b-a) & \text{si } \rho = 1 , \end{cases}$$

y existe límite cuando $x \to b$ sólo para $\rho < 1$; es decir, *la integral es convergente si y sólo si* $\rho < 1$, siendo entonces su valor

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\rho}\,dx = \frac{(b-a)^{1-\rho}}{1-\rho}.$$

Si el extremo crítico fuera el inferior, es decir, si tuviéramos $\int_a^b f$, siendo $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ no acotada, bastaría recordar que $\int_x^b f = -\int_b^x f$; y si fuera $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ integrable en todo intervalo cerrado incluído en $(a,b)$ entonces sería como antes, por definición,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

con $c \in (a,b)$ arbitrario, si son convergentes estas dos últimas integrales. Y si el punto crítico $c$ fuera interior al intervalo, sería igualmente

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

con la misma condición de convergencia para los dos sumandos.

*Ejemplo*. Estudiemos

$$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx\ ;$$

como se verifica que

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt[3]{1-t}}\,dt = \left[-\frac{3}{2}(1-t)^{\frac{2}{3}}\right]_0^x = -\frac{3}{2}\left((1-x)^{\frac{2}{3}} - 1\right) \quad \text{si } 0 < x < 1,$$

$$\int_x^5 \frac{1}{\sqrt[3]{1-t}}\,dt = \left[-\frac{3}{2}(1-t)^{\frac{2}{3}}\right]_x^5 = -\frac{3}{2}\left(2\sqrt[3]{2} - (1-x)^{\frac{2}{3}}\right) \quad \text{si } 1 < x < 5,$$

resulta finalmente que la integral es convergente, y

$$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx + \int_1^5 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\,dx = \frac{3}{2} - 3\sqrt[3]{2}.$$

**Criterios de convergencia**

Razonando igual que en el caso de intervalo no acotado, obtenemos resultados análogos.

*Teorema.* Si $f$ y $g$ son dos funciones positivas definidas en un intervalo $I = [a,b)$ y no acotadas, integrables en $[a,x]$ para todo $x \in I$, $g$ es mayorante de $f$ y $\int_a^\infty g$ es convergente, entonces $\int_a^\infty f$ es convergente (y si la segunda es divergente lo es la primera).

Como caso particular, si existe $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=l\in\mathbb{R}^*$, o bien, si $f(x)\sim l\cdot g(x)$ para $x\to b$, entonces las integrales de $f$ y $g$ tienen el mismo carácter; para $l=0$ el criterio es válido sólo en caso de convergencia, y para $l=\infty$ sólo en caso de divergencia.

Tomando $g(x)=\frac{1}{(b-x)^\rho}$, bastará encontrar un $\rho$ tal que exista $\lim_{x\to\infty}(b-x)^\rho f(x)=l\in\mathbb{R}^*$ (o bien, que $f(x)\sim\frac{l}{(b-x)^\rho}$): entonces $\int_a^\infty f$ será convergente si y sólo si $\rho<1$.

*Ejemplo 1.* Sea

$$\int_0^1 \frac{\log x}{e^{\sqrt{x}}}dx\,;$$

el extremo crítico es el límite inferior de integración, $x=0$, puesto que $\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{e^{\sqrt{x}}}=-\infty$; como

$$\lim_{x\to 0} x^{\frac{2}{3}}\frac{\log x}{e^{\sqrt{x}}}=0,$$

la integral es convergente. Es decir, recordando el ejemplo de más arriba, hemos comprobado la convergencia de la integral *doblemente impropia*

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{e^{\sqrt{x}}}dx\,.$$

*Ejemplo 2.* Consideremos ahora

$$\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)}dx\,,$$

donde la fracción racional del integrando es propia, y no acotada por tener $q(x)$ un factor $(x-s)^n$ con $s\in[a,b]$ y $n\geq 1$; si es $q(x)=(x-s)^n q_1(x)$ será

$$\lim_{x\to s}(x-s)^n\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(s)}{q_1(s)}\in\mathbb{R}^*,$$

y como $n\geq 1$ la integral $\int_a^b \frac{p(x)}{q(x)}dx$ es divergente siempre.

Lo mismo que en las integrales en intervalo no acotado, tenemos aquí el criterio de la convergencia *absoluta* para integrales de funciones cuyo signo cambie en todo entorno de $b$. Ejemplo análogo al allí visto es la integral convergente $\int_0^\pi \frac{sen\,x}{\sqrt{\pi-x}}$.

**Integración por partes y cambio de variable**

Todo lo dicho para las integrales *propias* es fácilmente trasladable aquí, a través de la noción fundamental de límite. De integración por partes ya hemos visto, en rigor, un ejemplo, cuando calculamos $\int_0^1 log(1-x)dx$, cálculo que ahora escribiríamos así,

$$\int_0^1 log(1-x)\,dx = \left[(x-1)\,log(1-x)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x-1}{1-x}dx = -1,$$

representando el valor superior del corchete un *límite*.

En el caso de los cambios de variable lo que ocurre es que la función del cambio, $\varphi$, será ahora una función de clase $C^1$ de $[t_0, t_1]$ sobre $[a, \infty)$, o recíprocamente de $[t_0, \infty)$ sobre $[a, b]$, o bien una función no acotada de $[t_0, t_1)$ sobre $[a, \infty)$, etc. Lo que puede ocurrir entonces es que el cambio nos haga pasar de una integral impropia a una propia, o recíprocamente: ello es una razón más para introducir el concepto de integral impropia.

*Ejemplo 1.* La integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{e^x-1}}dx$$

es impropia de punto crítico $x = 0$, cuya convergencia es fácil de comprobar aplicando el criterio del límite en cada uno de los subintervalos $[-1,0)$ y $(0,1]$. La descomponemos así:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{e^x-1}}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{e^x-1}}dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{e^x-1}}dx;$$

cambio de variable:

$$\sqrt[3]{e^x-1} = t,\ x = log\left(t^3+1\right),\ dx = \frac{3t^2}{t^3+1}dt;\ x = -1 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{e^{-1}-1},$$
$$x = 0 \Leftrightarrow t = 0,\ x = 1 \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{e-1};$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{e^x-1}}dx = \int_{\sqrt[3]{e^{-1}-1}}^0 \frac{3t}{t^3+1}dt + \int_0^{\sqrt[3]{e-1}} \frac{3t}{t^3+1}dt = \int_{\sqrt[3]{e^{-1}-1}}^{\sqrt[3]{e-1}} \frac{3t}{t^3+1}dt,$$

que es una integral propia: el intervalo sigue siendo acotado, y también lo es ahora la función, puesto que la única raíz real del denominador, $t = -1$, no pertenece a aquél.

*Ejemplo 2.* Sea

$$\int_0^\pi \frac{1}{2+cos\,2x}dx;$$

el cambio más conveniente para resolver esta integral propia es $tg\,x = t$, con lo que

$$cos\,2x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt,\ x = 0 \Leftrightarrow t = 0,\ x = \pi \Leftrightarrow t = 0:$$

los dos nuevos límites de integración son iguales. ¿Qué ha ocurrido aquí? Pues que la función *tg* *no es continua* en el intervalo $[0,\pi]$; como sí lo es en $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ y en $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$, podemos descomponer la integral en suma de dos:

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{2+cos\,2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+cos\,2x}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{2+cos\,2x}dx=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}dt+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{3+t^2}dt\,;$$

en este caso también podríamos haber hecho uso de la simetría de la función, escribiendo

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{2+cos\,2x}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2+cos\,2x}dx\,.$$

Terminemos el cálculo;

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{3+t^2}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}dt=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_{-\infty}^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\,.$$

# III - Aplicaciones geométricas de la integral simple

Consideraremos la aplicación de la integral a la medida de un área plana y de la longitud de una curva.

## Áreas planas

Al introducir el concepto de integral hablamos ya de medida de áreas. Lo único que hay que añadir ahora se refiere al *signo*: sabemos que la integral de una función positiva es positiva, y por lo tanto la de una función negativa es negativa. Ello hace que, si lo que queremos es calcular el área entre una curva (gráfica de una función) y el eje *OX*, tengamos que estudiar las intersecciones con éste, es decir, los ceros de la función, y dividir la integral en tramos, dando luego signo positivo al valor obtenido en cada uno; o, dicho más simplemente, integrar el *valor absoluto* de la función.

Si la curva viniera dada por sus ecuaciones paramétricas,

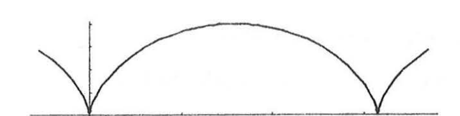
$$\sigma : I = [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$$
$$\sigma(t) = (x(t), y(t)) \ ,$$

todo equivaldría a hacer un cambio de variable, $x = x(t)$, en la integral, siendo entonces

$$A = \int_{t_0}^{t_1} y(t) x'(t) dt \, ,$$

con las mismas observaciones respecto del signo.

*Ejemplo.* Supongamos que queremos calcular el área encerrada por un período de *cicloide*



$$\begin{cases} x = a(t - sen\, t) \\ y = a(1 - cos\, t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

y el eje *OX*. Será

$$A = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - cos\, t)^2 \, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\, cos\, t + cos^2 t) dt =$$

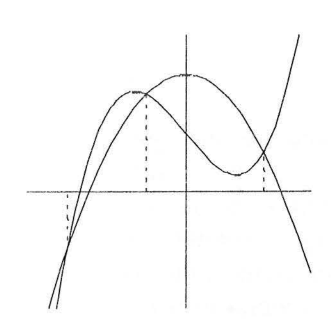
$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{2} - 2\, cos\, t + \frac{cos\, 2t}{2} \right) dt = a^2 \left[ \frac{3}{2} t - 2\, sen\, t + \frac{sen\, 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2 \, :$$

tres veces el área del círculo generador (el que al *rodar* sobre *OX* engendra la curva).

Si, lo que es mucho más general, se tratara de calcular el área entre dos curvas, gráficas de dos funciones $f$ y $g$ (y no necesariamente entre una de ellas y el eje de abscisas), habría que aplicar la misma idea: es decir, hacer

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx ,$$

si es $[a,b]$ el intervalo entre la primera y la última intersecciones. Y lo mismo si las curvas estuvieran dadas por sus ecuaciones paramétricas.



*Ejemplo.* Supongamos que queremos calcular el área acotada por las gráficas de $f(x) = 9 - 2x^2$ y $g(x) = x^3 - 5x + 3$; las intersecciones serán las raíces de la ecuación

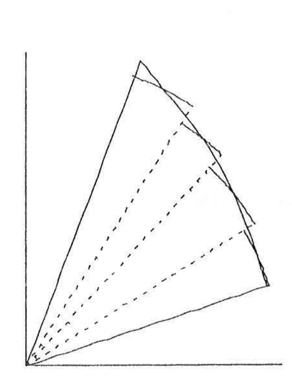
$$f(x) = g(x), \text{ o bien } x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0 ,$$

que son $x = -3$, $x = -1$ y $x = 2$; además, en el intervalo entre la primera y la segunda es $f(x) \leq g(x)$, y al revés entre la segunda y la tercera, luego

$$A = \int_{-3}^{-1} \left( x^3 - 5x + 3 - 9 + 2x^2 \right) dx + \int_{-1}^{2} \left( 9 - 2x^2 - x^3 + 5x - 3 \right) dx =$$

$$= \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{5x^2}{2} - 6x + \frac{2x^3}{3} \right]_{-3}^{-1} + \left[ 6x - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{5x^2}{2} \right]_{-1}^{2} = \frac{253}{12} .$$

**Curva dada en coordenadas polares**



Aunque lo podríamos ver más directamente dentro de las aplicaciones de la integral doble, vamos a razonarlo aquí. Supongamos, pues, que tenemos una curva dada en coordenadas polares,

$$r = f(\theta),$$

y queremos medir el área encerrada por ella entre los radios $\theta = \theta_a$ y $\theta = \theta_b$. Tomando, como hacíamos en coordenadas cartesianas, una partición del intervalo $I = [\theta_a, \theta_b]$,

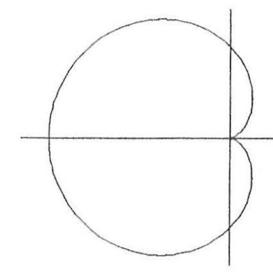
$$p = \{ \theta_0 = \theta_a, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}, \theta_n = \theta_b \},$$

sustituyamos, en cada subintervalo $I_k = [\theta_{k-1}, \theta_k]$, la curva por un arco de circunferencia de radio intermedio entre los valores extremos de $r$ en $I_k$, que si $f$ es continua será un valor de $r$, $r_k = r(\eta_k)$, con $\eta_k \in I_k$. La suma de las áreas de los sectores así formados,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r_k^2 (\theta_k - \theta_{k-1}),$$

será una aproximación del área que queremos medir, y tomando límites para $d(p) \to 0$ tendremos la medida buscada:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta)\, d\theta .$$



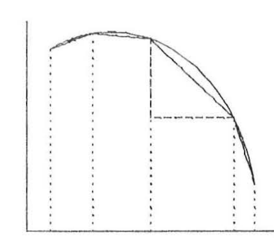
*Ejemplo.* Sea la curva llamada *cardioide*,

$$r = a(1 - cos\,\theta),\ \theta \in [0, 2\pi],$$

donde $a$ es un parámetro real. El área encerrada por esta curva será

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 (1 - cos\,\theta)^2\, d\theta = \frac{3}{2}\pi a^2 .$$

**Longitud de una curva plana**



Supongamos que queremos medir la longitud de una curva $y = f(x)$, donde $f$ es una función de clase $C^1$ definida en un intervalo $[a, b]$; dada una partición de éste,

$$p = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\},$$

una aproximación de dicha longitud será la suma de las longitudes de las cuerdas que $p$ determina, es decir,

$$l(p) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}\ ;$$

pero, según la fórmula de los incrementos finitos,

$$y_k - y_{k-1} = y'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

con $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$; luego

$$l(p) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + y'^2(\xi_k)}\,(x_k - x_{k-1}),$$

lo que es una suma de Riemann de la función $\sqrt{1 + f'^2}$ ; luego, definiendo la longitud como el límite de $l(p)$ cuando el diámetro $d(p)$ de la partición tiende a cero, resulta

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx\, ;$$

esta *diferencial de longitud*, *ds*, puede escribirse

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

expresión que utilizaremos también.

*Ejemplo*. Sea la curva llamada *catenaria*, de ecuación

$$y = p\,ch\frac{x}{p}, \quad x \in [-a, a],$$

donde $p$ es un parámetro dado; su longitud será

$$l = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + sh^2 \frac{x}{p}}\, dx = \int_{-a}^{a} ch\frac{x}{p}\, dx = \left[ p\, sh\frac{x}{p} \right]_{-a}^{a} = 2p\, sh\frac{a}{p}.$$

Si una curva viniera dada por sus ecuaciones paramétricas,

$$\sigma : I \to \mathbb{R}^2$$
$$\sigma(t) = (x(t), y(t)),$$

tendríamos como antes un simple cambio de variable, siendo entonces

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{x(t)'^2 + y(t)'^2}\; dt.$$

*Ejemplo*. Sea la curva (*astroide*)

$$\begin{cases} x = cos^3 t \\ y = sen^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]; \quad \begin{cases} dx = -3cos^2 t\, sen\, t\, dt \\ dy = 3sen^2 t\, cos\, t\, dt \end{cases}$$

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = 3\sqrt{cos^4 t\, sen^2 t + sen^4 t\, cos^2 t}\, dt =$$

$$= 3|sen\, t\, cos\, t|dt,$$

y utilizando la simetría de la curva para limitarnos al intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, con lo que podemos prescindir del símbolo del valor absoluto, resulta

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 sen\, t\, cos\, t\, dt = 12\left[\frac{sen^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$

**Curva dada en coordenadas polares**

Supongamos que la curva cuya longitud queremos medir está dada en coordenadas polares. De

$$\begin{cases} x = r\, cos\, \theta \\ y = r\, sen\, \theta \end{cases}$$

con $r = f(\theta)$, resulta

$$\begin{cases} dx = (r'\cos\theta - r\,sen\,\theta)\,d\theta \\ dy = (r'\,sen\,\theta + r\cos\theta)\,d\theta \end{cases} \qquad \sqrt{dx^2 + dy^2} =$$

$$= \sqrt{r'^2\left(\cos^2\theta + sen^2\theta\right) + r^2\left(\cos^2\theta + sen^2\theta\right) + 2rr'\left(-\cos\theta\,sen\,\theta + sen\,\theta\cos\theta\right)}\,d\theta =$$

$$= \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta,$$

y la longitud será

$$l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\theta.$$

*Ejemplo.* Sea otra vez la cardioide; tendremos (supuesto $a > 0$):

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\,sen^2\theta}\,d\theta = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2 - 2\cos\theta}\,d\theta =$$

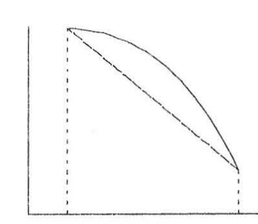
$$= a\int_0^{2\pi} 2\,sen\frac{\theta}{2}\,d\theta = a\left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a.$$

# IV - Integración numérica

La regla de Barrow es uno, entre otros, de los métodos existentes para calcular el valor exacto de una integral. Pero este valor puede aproximarse mediante métodos numéricos, vía hoy muy importante debido al desarrollo de los ordenadores electrónicos. Haremos una introducción a este tema.

El cálculo numérico de la integral de una función en un intervalo se basa en la sustitución de la función por otra, más sencilla, que coincide con la dada en algunos puntos, es decir, en lo que se llama *interpolación*. Nosotros vamos a considerar sólo dos casos: interpolación *lineal* e interpolación *cuadrática*.

**Interpolación lineal: método de los trapecios**



La interpolación lineal consiste, en lenguaje geométrico, en sustituir una curva por la recta que pasa por sus extremos, con lo que el área encerrada por aquélla es sustituida, como valor aproximado, por el área del trapecio definido por la cuerda. Es decir, hacemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Para que la aproximación sea aceptable lo que hacemos en realidad es dividir el intervalo en cierto número de partes, $n$, y aplicar lo expuesto en cada uno de los subintervalos así definidos. Si llamamos

$$\frac{b-a}{n}=h,\ f(a+kh)=y_k,\ k\in\{0,1,2,\cdots,n\},$$

la suma de las áreas de todos los trapecios será

$$h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\cdots+\frac{y_{n-2}+y_{n-1}}{2}+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right)=$$
$$=\frac{h}{2}\left(y_0+2(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})+y_n\right),$$

tomándose finalmente

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{2}(E+2M)$$

donde $E=y_0+y_n$, $M=y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}$: es la *fórmula de los trapecios*.

Se demuestra que, si la función $f$ es de clase $C^2$, existe un punto $\xi\in[a,b]$ tal que

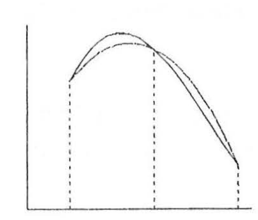
$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}(E+2M) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi),$$

lo que, si conocemos una cota de $|f''(x)|$ en $[a,b]$, nos permite acotar el error cometido.

Vemos que éste es inversamente proporcional al cuadrado del número $n$ de subintervalos, con lo que aumentando éste podemos disminuir rápidamente aquél (hay que tener en cuenta que, aparte de este error *sistemático* debido al método mismo, hay un error *de redondeo*, al ser también aproximados los valores $y_k$ de la función, cuyos valores exactos serán en general números irracionales, error que crecerá con $n$; por ello, al aumentar $n$ habrá que aumentar también el número de cifras decimales de los valores $y_k$). Veremos ejemplos más adelante.

**Interpolación cuadrática: método de Simpson**

La interpolación cuadrática consiste, como su nombre indica, en interpolar no mediante rectas, sino mediante curvas de segundo grado, concretamente *parábolas* de la forma $y = mx^2 + nx + p$. Para ello necesitamos tres puntos, es decir, no consideraremos sólo los extremos de la curva, sino también el punto de abscisa $\dfrac{a+b}{2}$.



Empezaremos calculando el área acotada por la parábola $y = mx^2 + nx + p$ definida por los tres puntos citados. Para mayor sencillez situaremos el origen de coordenadas en el punto de abscisa media, con lo que, llamando $\dfrac{b-a}{2} = h$, el área será

$$A = \int_{-h}^{h} \left(mx^2 + nx + p\right)dx = \left[\frac{mx^3}{3} + \frac{nx^2}{2} + px\right]_{-h}^{h} = \frac{2mh^3}{3} + 2ph;$$

llamando $y_{-1}$, $y_0$ e $y_1$ a las tres ordenadas,

$$\begin{cases} mh^2 - nh + p = y_{-1} \\ p = y_0 \\ mh^2 + nh + p = y_1 \end{cases} \qquad 2mh^2 + 2y_0 = y_{-1} + y_1, \quad m = \frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{2h^2},$$

y finalmente,

$$A = \frac{2h^3}{3}\frac{y_{-1} - 2y_0 + y_1}{2h^2} + 2hy_0 = \frac{h}{3}\left(y_{-1} + 4y_0 + y_1\right),$$

o si se prefiere,

$$A = \frac{b-a}{6}\left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

Lo mismo que en el caso anterior, lo que haremos realmente será dividir el intervalo $[a,b]$ de integración en $n$ partes, siendo ahora $n$ un número *par*, y aplicar lo que acabamos de ver a cada

uno de los subintervalos, lo que, llamando como antes $f(a+kh)=y_k$, $k\in\{0,1,2,\cdots,n\}$, nos da

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}\left((y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)\right),$$

es decir, llamando $E=y_0+y_n$, $I=y_1+y_3+\cdots+y_{n-1}$, $P=y_2+y_4+\cdots y_{n-2}$,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}(E+4I+2P),$$

que es la *fórmula de Simpson.*

Se demuestra que, si *f* es de clase $C^4$,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}(E+4I+2P)-\frac{(b-a)^5}{180n^4}f^{iv}(\xi)$$

para algún $\xi\in[a,b]$, lo que acotando $\left|f^{iv}(x)\right|$ en $[a,b]$ nos permitirá acotar el error. Vemos que éste es ahora inversamente proporcional a $n^4$, lo que nos dice que el método de Simpson da mayor aproximación que el de los trapecios, como cabía esperar.

*Ejemplo 1.* Consideremos una integral sencilla cuyo valor exacto calcularemos por la fórmula de Barrow, y comparemos éste con los obtenidos numéricamente. Sea la función *seno* en el intervalo $[0,\pi]$:

$$\int_0^\pi sen\,x\,dx=[-cos\,x]_0^\pi=2.$$

Los valores dados por las fórmulas de los trapecios y de Simpson para los valores indicados de $n$ son los del siguiente cuadro:

| $n$ | 10 | 20 | 40 | 70 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| Trapecios | 1,9835235 | 1,9958859 | 1,9989718 | 1,9996642 | 1,9998355 |
| Simpson | 2,0001095 | 2,0000067 | 2,0000004 | 2,00000005 | 2,00000001 |

Calculemos también las acotaciones teóricas del error, teniendo en cuenta que $\left|f^{(m)}(x)\right|\le 1$ cualquiera que sea $m$. Para los trapecios será

$$\varepsilon\le\frac{\pi^3}{12n^2},$$

es decir, para los valores de $n$ considerados, respectivamente

$$\varepsilon<0{,}03,\ \ \varepsilon<0{,}007,\ \ \varepsilon<0{,}002,\ \ \varepsilon<0{,}0006,\ \ \varepsilon<0{,}0003;$$

y para Simpson

$$\varepsilon \leq \frac{\pi^5}{180n^4},$$

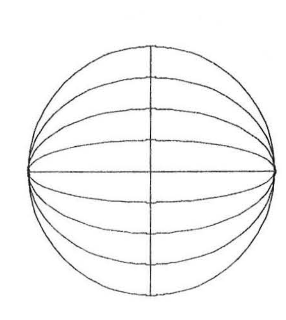
es decir,

$$\varepsilon < 0{,}0002\,,\quad \varepsilon < 0{,}00002\,,\quad \varepsilon < 7\cdot 10^{-7}\,,\quad \varepsilon < 8\cdot 10^{-8}\,,\quad \varepsilon < 2\cdot 10^{-8};$$

efectivamente, los errores reales son menores que estas cotas.

*Ejemplo 2*. Calculemos la longitud de una elipse de semiejes $a$ y $b$, $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,sen\,t \end{cases}$

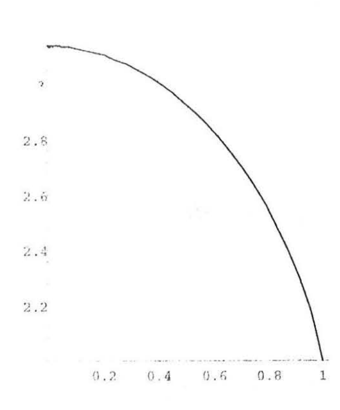
$$\begin{cases} dx = -a\,sen\,t\,dt \\ dy = b\cos t\,dt \end{cases} \quad \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2\,sen^2\,t + b^2\cos^2 t}\,dt = a\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,dt,$$



donde $e$ es la excentricidad, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{c}{a}$, parámetro que caracteriza cada clase de elipses semejantes, que vale 0 cuando $b = a$ (circunferencia) y 1 cuando $b = 0$ (eje mayor recorrido dos veces). En la figura se representan las elipses para las que $\frac{b}{a}$ vale 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ y 1, y la excentricidad 1, $\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{7}}{4}$ y 0 respectivamente. La longitud será

$$l = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,dt = 2a\varphi(e),$$

donde $\varphi(e) = \frac{l}{2a} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,dt$, razón de la longitud de la elipse al eje mayor, es función sólo de la excentricidad $e$, y varía entre los casos extremos $\varphi(0) = \pi$ (circunferencia) y $\varphi(1) = 2$ (eje mayor recorrido dos veces). No es una función elemental, y su gráfica es como indica la figura.




Sea, por ejemplo, la elipse de semiejes $a = 5$ y $b = 3$; la excentricidad es $e = \frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{5} = \frac{4}{5}$ y la longitud $l = 2a\,\varphi(e) = 10\,\varphi\left(\frac{4}{5}\right)$; aplicando la fórmula de Simpson con $n = 50$ obtenemos, con siete decimales,

$$\varphi\left(\frac{4}{5}\right) = 2{,}5526999,\quad \text{es decir,}\quad l = 25{,}526999.$$

# Apéndice - Cálculo de primitivas

El problema inverso de la derivación, es decir, el de encontrar una primitiva (o antiderivada) de una función $f$ dada, no tiene solución general. Incluso cuando $f$ es continua y sabemos que dicha primitiva existe, nada garantiza que ésta sea una función elemental. La función $f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$, por ejemplo, cuya derivada es la función elemental $f'(x)=\frac{e^x}{x}$, no lo es ella misma. Hay, sin embargo, métodos generales de antiderivación, o primitivación, (o *integración*, como suele decirse con cierta ambigüedad de lenguaje), como son el cambio de variable y la *integración* por partes (paralelos a los vistos en integrales), que permiten en algunos casos transformar la función $f$ en otra que, o bien tenga una primitiva conocida, o bien pertenezca a algún tipo para el que sí exista un algoritmo general de cálculo, como es el caso de las funciones racionales, según veremos.

La notación habitual (dudosamente afortunada) para representar una primitiva genérica de una función $f$ es

$$\int f(x)\,dx,$$

a la que se suele llamar *integral indefinida* de $f$; el conjunto de todas las primitivas de $f$ se representa entonces como

$$\int f(x)dx+C,$$

donde $C$ representa una constante cualquiera.

**Primitivas inmediatas**

Invirtiendo el cuadro de derivadas de las funciones elementales obtenemos las llamadas primitivas inmediatas. Omitiendo la constante C, que daremos en lo sucesivo por sobreentendida, tenemos:

$$\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1} \text{ si } a\neq -1;\ \int \frac{1}{x}dx=\log|x|;\ \int e^x dx=e^x;\ \int sen\,x\,dx=-cos\,x;$$

$$\int cos\,x\,dx=sen\,x;\ \int \frac{1}{cos^2 x}dx=tg\,x;\ \int shx\,dx=chx;\ \int chx\,dx=shx;\ \int \frac{1}{ch^2 x}dx=th\,x;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=arcsen\,x;\ \int \frac{1}{1+x^2}dx=arctg\,x;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=arg\,sh\,x=log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx=arg\,ch\,x=log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right);$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx=arg\,th\,x=\frac{1}{2}log\frac{1+x}{1-x}.$$

**Cambio de variable**

*Teorema.* Sea $f$ continua en un intervalo $I$, $\varphi\colon J \leftrightarrow I$ una *biyección* de clase $C^1$ de otro intervalo $J$ en $I$, y $F(t) = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$ en $J$; entonces se verifica en $I$ que

$$\int f(x)dx = F\left(\varphi^{-1}(x)\right).$$

*Demostración.* Derivando el segundo miembro, teniendo en cuenta que

$$F'(t) = f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t),$$

resulta:

$$\frac{d}{dx}F\left(\varphi^{-1}(x)\right) = F'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)} = f(x)\cdot\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)\frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)} = f(x). \blacksquare$$

*Ejemplo.* Recordando todo lo dicho cuando calculábamos el área de la elipse, en el cálculo de

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

podemos hacer $x = a\,sen\,t$ (biyección $[-a, a] \leftrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$), con lo que

$$F(t) = \int\sqrt{a^2 - a^2\,sen^2\,t}\cdot a\cos t = \frac{a^2}{2}\int(1 + \cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{sen\,2t}{2}\right);$$

y como

$$t = arcsen\frac{x}{a}, \quad sen\,2t = 2\,sen\,t\cos t = 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{2}{a^2}x\sqrt{a^2 - x^2},$$

resulta finalmente

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\left(arcsen\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}\right) = \frac{a^2}{2}arcsen\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2}.$$

*Observación.* Es obvia la estrecha relación entre el cambio de variable aquí y en el cálculo de integrales por la regla de Barrow. Hay, sin embargo, una diferencia importante: aquí necesitamos que la función $\varphi$ sea *biyectiva*, para *deshacer* el cambio con $t = \varphi^{-1}(x)$, condición que en el otro caso no es necesaria. Esto acentúa la conveniencia de aplicar allí el cambio de los extremos de integración, como hemos visto en los ejemplos, en lugar de deshacer el cambio de variable y aplicar la regla de Barrow en el intervalo original.

La antiderivación por cambio de variable nos permite ampliar el cuadro de primitivas inmediatas, de la siguiente forma. Sea, por ejemplo,

$$\int f(x)^a f'(x)\,dx, \text{ donde } a \neq -1;$$

haciendo $t = f(x)$ resulta $f'(x)\,dx = dt$, $\int t^a dt = \dfrac{t^{a+1}}{a+1}$, y $\int f(x)^a f'(x)\,dx = \dfrac{f(x)^{a+1}}{a+1}$;

y análogamente $\int \dfrac{1}{f(x)} f'(x)dx = log|f(x)|$, $\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)}$, etc. (lo que equivale a combinar el cuadro de inmediatas con la derivación de una función compuesta).

**Integración por partes**

*Teorema.* Sean $u$ y $v$ dos funciones de clase $C^1$ en un intervalo; entonces

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx, \text{ o bien, } \int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

La demostración es inmediata a partir de la derivada del producto $uv$.

*Ejemplo.* Sea

$$\int x\,sen\,x dx;$$

$$\begin{array}{l|l} u = x & du = dx \\ dv = sen\,x\,dx & v = -cos\,x \end{array} \quad \int x\,sen\,x\,dx = -x\,cos\,x + \int cos\,x\,dx = -x\,cos\,x + sen\,x.$$

**Primitivas de una función racional**

Aunque hemos dicho que el problema de la búsqueda de las primitivas de una función dada no tiene una solución general, hay tipos particulares de funciones para los que sí existe un algoritmo general de cálculo. Es lo que ocurre con las funciones racionales, como vamos a ver en lo que sigue. Sea $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ una fracción racional *irreducible*, es decir, en la que $p$ y $q$ son polinomios primos entre sí (sin raíces comunes), y *propia*, es decir, el grado de $p$ es estrictamente menor que el de $q$ (si así no fuera bastaría hacer la división: el cociente entero tiene primitiva inmediata). Para calcular las primitivas de $f$ hemos de recordar previamente un resultado del álgebra de funciones racionales.

**Descomposición de una fracción racional en elementos simples**

Sea $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ una fracción racional irreducible y propia. Se demuestra que $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ se expresa, de manera única, como suma de *elementos simples*, es decir, fracciones

$$\frac{a_1}{x-s}, \ \frac{a_2}{(x-s)^2}, \ \ldots, \ \frac{a_r}{(x-s)^r}$$

para cada raíz real $s$ de orden $r$ del denominador, y

$$\frac{b_1x + c_1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}, \ \frac{b_2x + c_2}{\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^2}, \ \ldots, \ \frac{b_\rho x + c_\rho}{\left((x-\alpha)^2 + \beta^2\right)^\rho}$$

para cada par $\alpha \pm \beta i$ de raíces imaginarias conjugadas de orden $\rho$.

Aceptado este resultado, ¿cómo calcular los coeficientes $a_k$, $b_k$ y $c_k$? Lo más simple es utilizar el método de los coeficientes indeterminados, es decir, escribir la descomposición con coeficientes desconocidos e imponer luego la condición de que la identidad se cumpla.

*Ejemplo*. Sea la fracción

$$\frac{x^2-5x+3}{x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2x},$$

cuyo denominador tiene como raíces $x=0$ simple, $x=1$ doble y $x=\pm\sqrt{2}\,i$ simples, por lo que su descomposición factorial es

$$x(x-1)^2(x^2+2).$$

Según el teorema arriba enunciado, la descomposición de esta fracción racional en elementos simples será de la forma

$$\frac{x^2-5x+3}{x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{ex+f}{x^2+2},$$

y haciendo la suma del segundo miembro, la fracción dada habrá de ser idéntica a

$$\frac{a(x-1)^2(x^2+2)+bx(x-1)(x^2+2)+cx(x^2+2)+(ex+f)x(x-1)^2}{x(x-1)^2(x^2+2)},$$

lo que implica la identidad de los numeradores, de la que deduciremos los coeficientes $a$, $b$, $c$, $e$ y $f$. Para ello podemos, bien identificar los coeficientes homólogos de ambos polinomios, bien dar valores a $x$ e igualar los valores numéricos resultantes, bien una combinación de ambas cosas. Es muy simple y eficaz dar a $x$ valores que anulen el denominador:

$$x=0:\ 3=a(-1)^2 2,\ a=\frac{3}{2};\quad x=1:\ 1-5+3=c(1+2),\ c=-\frac{1}{3};\quad x=\sqrt{2}\,i:$$

$$-2-5\sqrt{2}\,i+3=\left(\sqrt{2}ei+f\right)\sqrt{2}\,i\left(\sqrt{2}\,i-1\right)^2,\ 1-5\sqrt{2}\,i=2e+4f+(-f+4e)\sqrt{2}\,i,$$

$$\begin{cases}2e+4f=1\\4e-f=-5\end{cases}\ e=-\frac{19}{18},\ f=\frac{7}{9};\ \text{coeficientes de } x^4:\ 0=a+b+e,\ b=-\frac{3}{2}+\frac{19}{18}=-\frac{4}{9};$$

$$\frac{x^2-5x+3}{x^5-2x^4+3x^3-4x^2+2x}=\frac{1}{18}\left(\frac{27}{x}-\frac{8}{x-1}-\frac{6}{(x-1)^2}+\frac{-19x+14}{x^2+2}\right).$$

**Primitivas de los elementos simples**

Desde el punto de vista del cálculo de las primitivas, los elementos simples son de cuatro tipos:

$$\text{(i)}\ \frac{a}{x-s};\quad \text{(ii)}\ \frac{a}{(x-s)^n};\quad \text{(iii)}\ \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2};\quad \text{(iv)}\ \frac{ax+b}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^n}.$$

Tipo (i).

$$\int\frac{a}{x-s}\,dx=a\,log|x-s|.$$

Tipo (ii).

$$\int \frac{a}{(x-s)^n}dx = \int a(x-s)^{-n}dx = \frac{a(x-s)^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{a}{(n-1)(x-s)^{n-1}}.$$

Tipo (iii).

$$\int \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \int \frac{a(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx + \int \frac{a\alpha+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx;$$

$$\int \frac{a(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{a}{2}\int \frac{2(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{a}{2}log\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right);$$

$$\int \frac{a\alpha+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{a\alpha+b}{\beta}\int \frac{\frac{1}{\beta}}{\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}dx = \frac{a\alpha+b}{\beta}arctg\frac{x-\alpha}{\beta};$$

$$\int \frac{ax+b}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx = \frac{a}{2}log\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right) + \frac{a\alpha+b}{\beta}arctg\frac{x-\alpha}{\beta}.$$

Tipo (iv).

$$\int \frac{ax+b}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^n}dx = \int \frac{a(x-\alpha)}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^n}dx + \int \frac{a\alpha+b}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^n}dx;$$

$$\int \frac{a(x-\alpha)}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^n}dx = \frac{a}{2}\int 2(x-\alpha)\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{-n}dx =$$

$$= \frac{a}{2}\frac{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{a}{2(n-1)\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{n-1}};$$

para la expresión que queda por resolver buscaremos una ley de recurrencia que reduzca el valor de $n$:

$$\int \frac{a\alpha+b}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^n}dx = (a\alpha+b)\ \boldsymbol{J}_n = \frac{1}{\beta^2}\int \frac{(a\alpha+b)\left((x-\alpha)^2+\beta^2-(x-\alpha)^2\right)}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^n}dx =$$

$$= \frac{a\alpha+b}{\beta^2}\boldsymbol{J}_{n-1} - \frac{a\alpha+b}{\beta^2}\int \frac{(x-\alpha)^2}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^n}dx,$$

y ésta última por partes;

$$\frac{x-\alpha}{2} = u \qquad du = \frac{dx}{2}$$

$$2(x-\alpha)\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{-n}dx = dv \qquad v = \frac{\left((x-\alpha)+\beta^2\right)^{-n+1}}{-n+1}$$

$$\int \frac{(x-\alpha)^2}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^n}dx = -\frac{x-\alpha}{2(n-1)\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)}\int \frac{1}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{n-1}}dx,$$

$$-\frac{a\alpha+b}{\beta^2}\int \frac{(x-\alpha)^2}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^n}dx = \frac{(a\alpha+b)(x-\alpha)}{2\beta^2(n-1)\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^{n-1}} - \frac{a\alpha+b}{2\beta^2(n-1)}\boldsymbol{J}_{n-1}.$$

habiendo logrado lo que buscábamos; repitiendo el proceso mientras sea necesario llegaremos a

$$\boldsymbol{J}_1 = \int \frac{1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} dx = \frac{1}{\beta} arctg \frac{x-\alpha}{\beta}.$$

*Ejemplo 1*. Para la función antes estudiada, tendremos:

$$\int \frac{x^2 - 5x + 3}{x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 2x} dx = \frac{1}{18} \int \left( \frac{27}{x} - \frac{8}{x-1} - \frac{6}{(x-1)^2} + \frac{-19x + 14}{x^2 + 2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{18} \left( 27 \log|x| - 8 \log|x-1| + \frac{6}{x-1} - \frac{19}{2} \log(x^2 + 2) + 7\sqrt{2}\, arctg \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

*Ejemplo 2*. Sea ahora

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x(x^2 + 4)^2} dx ;$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x(x^2 + 4)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 4} + \frac{ex + f}{(x^2 + 4)^2} = \frac{a(x^2 + 4)^2 + (bx + c)x(x^2 + 4) + (ex + f)x}{x(x^2 + 4)^2};$$

$$x = 0 : 1 = 16a,\ a = \frac{1}{16};\ x = 2i : -4 + 2i + 1 = (2ei + f)2i,$$

$$-3 + 2i = -4e + 2fi,\ e = \frac{3}{4},\ f = 1;\ x^4 : 0 = a + b,\ b = -\frac{1}{16};\ x^3 : 0 = c;$$

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{x(x^2 + 4)^2} dx = \frac{1}{16} \log|x| - \frac{1}{32} \log(x^2 + 4) - \frac{3}{8} \frac{1}{x^2 + 4} + \int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx,$$

donde el último sumando es lo que llamábamos $\boldsymbol{J}_2$; siguiendo como en el caso general,

$$\boldsymbol{J}_2 = \int \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x^2 + 4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} dx = \frac{1}{4} \boldsymbol{J}_1 - \frac{1}{4} \int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx;$$

$$\boldsymbol{J}_1 = \int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1/2}{(x/2)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} arctg \frac{x}{2};$$

y la última por partes:

$$\left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = x(x^2 + 4)^{-2} dx \end{array} \right| \begin{array}{l} du = dx \\ v = -\frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1} \end{array}$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{1}{2} \boldsymbol{J}_1 = -\frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{1}{4} arctg \frac{x}{2};$$

y finalmente, ordenando y simplificando,

$$\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+4)^2}dx = \frac{1}{32}log\frac{x^2}{x^2+4} + \frac{1}{16}arctg\frac{x}{2} + \frac{x-3}{8(x^2+4)}.$$

**Método de Hermite**

De todo lo anterior se desprende que toda función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, irreducible y propia, tiene una primitiva elemental, en la que pueden aparecer sólo logaritmos, arcos-tangente y una función racional, ésta última si y sólo si hay elementos simples de los tipos (ii) y (iv), es decir, si el denominador $q$ tiene raíces múltiples. Cuando esto ocurre, y especialmente cuando hay elementos del tipo (iv) (raíces múltiples *imaginarias*), el proceso de cálculo visto puede ser pesado, como acabamos de comprobar. Hay entonces otro método, basado en el siguiente

*Teorema.* Si la primitiva de una fracción racional tiene parte racional, ésta es una fracción propia de la forma $\frac{p_1(x)}{q_1(x)}$, donde $q_1$ tiene las mismas raíces que $q$ pero con órdenes de multiplicidad una unidad menores, y el resto de la primitiva es $\int \frac{p_2(x)}{q_2(x)}dx$, donde la fracción que aparece es también propia y $q_2$ tiene las mismas raíces que $q$ pero todas simples (obviamente, $q = q_1 \cdot q_2$).

Este teorema conduce al llamado *método de Hermite*, que veremos con un ejemplo.

*Ejemplo.* Calculemos otra vez

$$\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+4)^2}dx.$$

Según el teorema, podemos escribir

$$\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+4)^2}dx = \frac{ax+b}{x^2+4} + \int \frac{cx^2+ex+f}{x(x^2+4)}dx,$$

donde en cada fracción del segundo miembro aparece como numerador un polinomio genérico de grado inferior al del denominador, y sólo faltaría derivar e identificar para calcular $a$, $b$, $c$, $e$ y $f$. Pero si así lo hiciéramos, para resolver la primitiva del segundo miembro tendríamos que descomponer la fracción en elementos simples y volver a determinar nuevos coeficientes; naturalmente, es mejor hacerlo todo en un solo paso escribiendo la identidad de Hermite así:

$$\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+4)^2}dx = \frac{ax+b}{x^2+4} + \int \left(\frac{m}{x} + \frac{nx+p}{x^2+4}\right)dx.$$

Derivando e identificando:

$$\frac{x^2+x+1}{x(x^2+4)^2} = \frac{a(x^2+4)-2x(ax+b)}{(x^2+4)^2} + \frac{m}{x} + \frac{nx+p}{x^2+4} =$$

$$= \frac{ax(x^2+4) - 2x^2(ax+b) + m(x^2+4)^2 + (nx+p)x(x^2+4)}{x(x^2+4)^2};$$

$$x=0:\ 1=16m,\ m=\frac{1}{16};\ \ x=2i:\ -4+2i+1=-2(-4)(2ai+b),\ -3+2i=8b+16ai,$$

$$a=\frac{1}{8},\ b=-\frac{3}{8};\ \ x^4:\ 0=m+n,\ n=-\frac{1}{16};\ \ x^3:\ 0=a-2a+p,\ p=\frac{1}{8};$$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+4)^2}dx = \frac{x-3}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16}\left( log|x| - \frac{1}{2}log\left(x^2+4\right)\right) + \frac{1}{16}\int \frac{1/2}{\left(x/2\right)^2+1}dx =$$

$$= \frac{x-3}{8(x^2+4)} + \frac{1}{32}log\frac{x^2}{x^2+4} + \frac{1}{16}arctg\frac{x}{2},$$

resultado que ya habíamos obtenido. Puede observarse que con este método se simplifica la integración propiamente dicha, pero a cambio la determinación de los coeficientes puede hacerse más farragosa.

**Cálculo de primitivas por racionalización**

Según acabamos de ver, el problema de calcular una primitiva de una función racional tiene una solución general. Si, dada una función no racional, podemos, mediante un cambio de variable, transformar su integral indefinida en la de una función racional, resolviendo ésta y deshaciendo el cambio tendremos una primitiva de la función dada. Es lo que se llama *método de racionalización*. Veremos a continuación algunos casos en los que esto es posible.

En lo que sigue, $f_r(u,v)$ representará una función racional de dos variables, es decir, $f_r(u,v) = \frac{p(u,v)}{q(u,v)}$, donde $p$ y $q$ son polinomios en las variables $u$ y $v$.

**Primitivas de funciones irracionales**

1) Sean las primitivas de la forma

$$\int f_r\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}}\right)dx\ , \text{ con } \begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix} \neq 0;$$

este problema puede resolverse por racionalización, haciendo

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+e}} = t;$$

en efecto:

$$ax+b = (cx+e)t^n,\ \ x = -\frac{et^n-b}{ct^n-a},$$

$$dx = -\frac{net^{n-1}(ct^n-a) - nct^{n-1}(et^n-b)}{(ct^n-a)^2}dt = \frac{n(ae-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}dt\ ,$$

y el integrando queda racionalizado.

*Ejemplo*. Calculemos

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx\,;$$

reduciendo los exponentes fraccionarios a común denominador, es decir, escribiendo $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ y $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, lo que tenemos es

$$\int \frac{1+x}{\sqrt[6]{x}^3+\sqrt[6]{x}^2}dx\,,$$

y haremos el cambio

$$x^{\frac{1}{6}}=t\,,\quad x=t^6\,,\quad dx=6t^5dt\,,$$

obteniéndose

$$6\int \frac{1+t^6}{t^3+t^2}t^5dt=6\int \frac{t^3+t^9}{t+1}dt\,;$$

y resolviendo y deshaciendo el cambio,

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4}+\frac{6x^{\frac{7}{6}}}{7}-x+\frac{6x^{\frac{5}{6}}}{5}-\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2}+4x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{1}{3}}+12x^{\frac{1}{6}}-12log\left|x^{\frac{1}{6}}+1\right|.$$

Estudiemos ahora las primitivas del tipo

$$\int f_r\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx\,.$$

También este caso puede resolverse por racionalización, como vamos a ver.

II) Si $a>0$, hacemos

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x+t\,,$$

con lo que, elevando al cuadrado,

$$bx+c=2\sqrt{a}xt+t^2\,,\quad x=-\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t-b}\,,\quad \sqrt{ax^2+bx+c}=-\sqrt{a}\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t-b}+t=$$
$$=\frac{\sqrt{a}t^2-bt-c}{2\sqrt{a}t-b}\,,\quad dx=\frac{2t\left(2\sqrt{a}t-b\right)-2\sqrt{a}\left(t^2-c\right)}{\left(2\sqrt{a}t-b\right)^2}dt=\frac{2\left(\sqrt{a}t^2-bt+\sqrt{a}c\right)}{\left(2\sqrt{a}t-b\right)^2}dt\,,$$

y el integrando está racionalizado.

III) Si $a<0$, $c>0$, hacemos

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}\,,$$

de donde, como antes,

$$ax^2+bx=x^2t^2+2\sqrt{c}xt\,,\quad ax+b=xt^2+2\sqrt{c}t\,,\quad x=-\frac{2\sqrt{c}t-b}{t^2-a},\ \text{etc.}$$

IV) Si $a<0$, $c<0$ y son $r$ y $s$ los ceros del polinomio $ax^2+bx+c$ (reales y distintos, pues si no fuera así sería $ax^2+bx+c\le 0$ para todo $x$), hacemos

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-r)(x-s)}=(x-r)t\,,$$

con lo que

$$a(x-s)=(x-r)t^2,\quad x=\frac{rt^2-as}{t^2-a},\ \text{etc.}$$

*Ejemplo 1*. Sea

$$\int (x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}dx\,;$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=x+t\,,\quad x+1=2xt+t^2,\quad x=\frac{t^2-1}{-2t+1},\quad \sqrt{x^2+x+1}=\frac{-t^2+t-1}{-2t+1},$$

$$dx=\frac{2(-t^2+t-1)}{(-2t+1)^2}dt\,;\quad -2\int\frac{2t-1}{(t^2-t+1)^2}dt=\frac{2}{t^2-t+1}\,;$$

$$t=\sqrt{x^2+x+1}-x\,,\quad t^2-t+1=2(x^2+x+1)-(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,;$$

$$\int (x^2+x+1)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{2}{2(x^2+x+1)-(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

*Ejemplo 2*. Sea ahora

$$\int\frac{x}{\sqrt{12+4x-x^2}}dx\,;$$

el cambio será $\sqrt{12+4x-x^2}=2\sqrt{3}+xt$, etc. etc., resultando finalmente, después de operar y simplificar,

$$\int\frac{x}{\sqrt{12+4x-x^2}}dx=-\sqrt{12+4x-x^2}-2\,arc\,sen\frac{2-x}{4}.$$

**Diferenciales binomias.**

Suele llamarse diferenciales binomias a las expresiones

$$x^m(a+bx^n)^p\,dx\,,$$

donde $a$ y $b$ son coeficientes reales y $m$, $n$ y $p$ exponentes *racionales*. Mediante el cambio

$$x^n=t\,,\quad x=t^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1-n}{n}}dt\,,$$

la integral indefinida se convierte en

$$\int t^{\frac{m}{n}}(a+bt)^p \frac{1}{n} t^{\frac{1-n}{n}} dt = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m-n+1}{n}}(a+bt)^p dt = \frac{1}{n}\int t^q (a+bt)^p dt,$$

con $q = \dfrac{m-n+1}{n}$, que es la llamada forma reducida. Entonces:

i) si $p$ es entero y $q = \dfrac{\alpha}{\beta}$, lo que tenemos es $\int f_r\left(t, \sqrt[\beta]{t}\right) dt$, tipo I) ya visto;

ii) si $q$ es entero y $p = \dfrac{\alpha}{\beta}$, tenemos $\int f_r\left(t, \sqrt[\beta]{a+bt}\right) dt$, también tipo I);

iii) si $p+q$ es entero, escribiendo $\int t^{p+q}\left(\dfrac{a+bt}{t}\right)^p dt$ y siendo $p$ como en ii), tenemos $\int f_r\left(t, \sqrt[\beta]{\dfrac{a+bt}{t}}\right) dt$, igualmente tipo I);

iv) en cualquier otro caso no existe primitiva elemental, según demostró el matemático ruso Panufty Chebishev.

*Ejemplo 1.* Sea

$$\int x^{\frac{2}{5}}\left(1+x\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx :$$

$$m=\frac{2}{5},\ n=\frac{3}{2},\ p=\frac{1}{3}\notin \mathbb{Z},\ q=\frac{m-n+1}{n}=-\frac{1}{15}\notin \mathbb{Z},\ p+q=\frac{4}{15}\notin \mathbb{Z};$$

no existe primitiva elemental.

*Ejemplo 2*

$$\int \sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{x}}{x^2}} dx ;$$

$$\sqrt[3]{\frac{2+\sqrt{x}}{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}\left(2+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}};\ m=-\frac{2}{3},\ n=\frac{1}{2},\ p=\frac{1}{3},\ q=-\frac{1}{3},\ p+q=0\in \mathbb{Z};$$

$$x=t^2,\ dx=2t\,dt;\ 2\int \sqrt[3]{\frac{2+t}{t^4}}\, t\,dt = 2\int \sqrt[3]{\frac{2+t}{t}}\, dt;\ \frac{2+t}{t}=u^3:$$

$$\int \frac{-12u^3}{\left(u^3-1\right)^2} du = \frac{4u}{u^3-1}+\frac{2}{3}log\frac{u^3-1}{(u-1)^3}+\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{2u+1}{\sqrt{3}};$$

y deshaciendo los cambios, es decir, haciendo $u=\sqrt[3]{\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$, obtenemos la primitiva buscada.

**Funciones trascendentes**

Consideraremos funciones racionales de senos y cosenos, de exponenciales y, lo que se reduce a lo anterior, de funciones hiperbólicas.

**Primitivas de funciones trigonométricas**

Sea

$$\int f_r(sen\,x, cos\,x)dx .$$

I) Estas primitivas se racionalizan mediante el cambio

$$t = tg\frac{x}{2},$$

ya que de la identidad $cos^2\omega = \dfrac{cos^2\omega}{cos^2\omega + sen^2\omega} = \dfrac{1}{1+tg^2\omega}$ resulta $sen\,x = 2sen\dfrac{x}{2}\,cos\dfrac{x}{2} =$ $= 2tg\dfrac{x}{2}\,cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $cos\,x = 2cos^2\dfrac{x}{2} - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, y de $x = 2arctg\,t$, diferenciando, $dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$.

Aparte de este método general hay otros, aplicables sólo a algunos casos particulares, que pueden resultar más sencillos.

II) Si $f_r$ es función *impar* de $cos\,x$, la primitiva se racionaliza mediante el cambio

$$t = sen\,x ;$$

efectivamente, si $f_r(sen\,x, -cos\,x) = -f_r(sen\,x, cos\,x)$, $\dfrac{f_r(sen\,x, cos\,x)}{cos\,x}$ es par en $cos\,x$, es decir, función racional de $sen\,x$ y de $cos^2 x$, o sea función racional de $sen\,x$ solamente, $\dfrac{f_r(sen\,x, cos\,x)}{cos\,x} = g_r(sen\,x)$, y $f_r(sen\,x, cos\,x) = g_r(sen\,x)\,cos\,x$, con lo que tras el cambio tenemos

$$\int g_r(t)\,dt ,$$

racional; análogamente se demuestra que:

III) si $f_r$ es función *impar* de $sen\,x$, la primitiva se racionaliza mediante el cambio

$$t = cos\,x ,$$

y IV) si $f_r(-sen\,x, -cos\,x) = f_r(sen\,x, cos\,x)$, haciendo

$$t = tg\,x .$$

*Ejemplo 1.* Sea

$$\int \frac{1}{2+cos\,x}dx ;$$

no está en ninguno de los casos particulares; haciendo el cambio general $t = tg\dfrac{x}{2}$ se obtiene

$$\int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{3+t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{t}{\sqrt{3}},$$

$$\int \frac{1}{2+cos\,x} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{tg\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}.$$

*Ejemplo 2.* Sea ahora

$$\int \frac{4-3cos^3 x}{sen\,x} dx\,;$$

la función es impar en $sen\,x$, luego haremos $t = cos\,x$ ; $dt = -sen\,x\,dx$,

$$\int \frac{4-3cos^3 x}{sen\,x} dx = \int \frac{4-3cos^3 x}{sen^2 x} sen\,x\,dx\,;\ -\int \frac{4-3t^3}{1-t^2} dt = \int \left(-3t + \frac{3t-4}{1-t^2}\right) dt\,;$$

$$\frac{3t-4}{1-t^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t} = \frac{a(1-t)+b(1+t)}{1-t^2};\ t=1:\ -1=2b,\ b=-\frac{1}{2};\ t=-1:\ -7=2a,$$

$$a=-\frac{7}{2};\ -\int \frac{4-3t^3}{1-t^2} dt = -\frac{3t^2}{2} - \frac{7}{2} log(1+t) + \frac{1}{2} log(1-t) = -\frac{3t^2}{2} + \frac{1}{2} log \frac{1-t}{(1+t)^7};$$

$$\int \frac{4-3cos^3 x}{sen\,x} dx = -\frac{3cos^2 x}{2} + \frac{1}{2} log \frac{1-cos\,x}{(1+cos\,x)^7}.$$

**Primitivas de funciones exponenciales e hiperbólicas**

V) En el caso

$$\int f_r\left(e^{ax}\right) dx,$$

donde $f_r$ sigue representando una función racional, ahora de una variable, y $a$ es un parámetro real, la racionalización se consigue simplemente mediante el cambio

$$t = e^{ax},$$

ya que

$$x = \frac{log\,t}{a},\quad dx = \frac{1}{at} dt,$$

y queda

$$\frac{1}{a} \int \frac{f_r(t)}{t} dt.$$

Como caso particular tenemos las primitivas de *funciones hiperbólicas*. La integral indefinida

$$\int f_r(sh\,x, ch\,x)\,dx$$

se reduce al caso anterior sin más que aplicar la definición de estas funciones:

$$sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

No obstante, como ocurría con las funciones circulares, hay tres casos particulares análogos en los que pueden aplicarse otros cambios:

VI) si $f_r$ es función impar de $sh\,x$, $t = ch\,x$;

VII) si $f_r$ es función impar de $ch\,x$, $t = sh\,x$;

VIII) y si $xf_r(-sh\,x, -ch\,x) = f_r(sh\,x, ch\,x)$, $t = th\,x$.

*Ejemplo.* Sea

$$\int \frac{ch\,x - sh\,x}{1 - sh^2 x}\,dx;$$

$$t = e^x, \quad dx = \frac{1}{t}dt; \quad \int \frac{4t^{-1}}{4 - \left(t - t^{-1}\right)^2}\frac{1}{t}dt = \int \frac{4t^{-1}}{6 - t^2 - t^{-2}}\frac{1}{t}dt = \int \frac{-4}{t^4 - 6t^2 + 1}dt;$$

$$t^4 - 6t^2 + 1 = \left(t^2 - 1\right)^2 - 4t^2 = \left(t^2 + 2t - 1\right)\left(t^2 - 2t - 1\right) =$$
$$= \left(t + 1 + \sqrt{2}\right)\left(t + 1 - \sqrt{2}\right)\left(t - 1 + \sqrt{2}\right)\left(t - 1 - \sqrt{2}\right),$$
$$\frac{-4}{t^4 - 6t^2 + 1} = \frac{a}{t + 1 + \sqrt{2}} + \frac{b}{t + 1 - \sqrt{2}} + \frac{c}{t - 1 + \sqrt{2}} + \frac{d}{t - 1 - \sqrt{2}},$$

etc, resultando al final, tras deshacer el cambio,

$$\int \frac{ch\,x - sh\,x}{1 - sh^2 x}\,dx = \frac{1}{2}log\left|\frac{sh\,x + 1}{sh\,x - 1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}log\left|\frac{ch\,x - \sqrt{2}}{ch\,x + \sqrt{2}}\right|.$$

Pero también podríamos descomponer la primitiva en suma de dos,

$$\int \frac{ch\,x - sh\,x}{1 - sh^2 x}\,dx = \int \frac{ch\,x}{1 - sh^2 x}\,dx + \int \frac{-sh\,x}{1 - sh^2 x}\,dx,$$

respectivamente impares en $ch\,x$ y en $sh\,x$, y hacer los cambios $t = sh\,x$ en la primera y $u = ch\,x$ en la segunda, con lo que se convierten en

$$\int \frac{1}{1 - t^2}dt \quad \text{y} \quad \int \frac{-1}{2 - u^2}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}du,$$

inmediatas, y respectivamente iguales a

$$\frac{1}{2}log\left|\frac{t + 1}{t - 1}\right| \quad \text{y} \quad \frac{1}{2\sqrt{2}}log\left|\frac{u - \sqrt{2}}{u + \sqrt{2}}\right|,$$

y deshaciendo los cambios y sumando resulta la primitiva ya calculada.

**Otro método para el cálculo de $\int f_r\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$**

Si $b=0$, sacando de la raíz el factor $\sqrt{|a|}$ ésta queda de alguna de las tres formas

$$\text{i) } \sqrt{x^2+\alpha^2}\,,\quad \text{ii) } \sqrt{x^2-\alpha^2}\,,\quad \text{iii) } \sqrt{\alpha^2-x^2}\,,$$

que mediante los cambios respectivos

$$\text{i) } x=\alpha\, sh\, t \text{ ó } x=\alpha\, tg\, t\,,\quad \text{ii) } x=\alpha\, ch\, t \text{ ó } x=\frac{\alpha}{cos\, t}\,,\quad \text{iii) } x=\alpha\, sen\, t \text{ ó } x=\alpha\, cos\, t$$

se reducen a casos ya vistos.

Y si $b\neq 0$, mediante el cambio previo

$$u=x+\frac{b}{2a}$$

estamos en el caso anterior.

Veamos, como ejemplo, dos primitivas ya calculadas anteriormente.

*Ejemplo 1.* Sea

$$\int\left(x^2+x+1\right)^{-\frac{3}{2}}dx\,;$$

hacemos primero la última transformación indicada para conseguir un trinomio con $b=0$, y aplicamos después el cambio de variable adecuado;

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right);\quad \frac{2x+1}{\sqrt{3}}=sh\,t\,,\quad x^2+x+1=\frac{3}{4}ch^2t\,,$$

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}ch\,t\,dt\,;\quad \int\left(\frac{3}{4}ch^2t\right)^{-\frac{3}{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}ch\,t\,dt=\frac{4}{3}\int\frac{1}{ch^2t}dt=\frac{4}{3}th\,t\,;$$

$$th\,t=\frac{\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}\,,\quad \int\left(x^2+x+1\right)^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{2(2x+1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}\,.$$

Esta primitiva y la encontrada más arriba son distintas, pero puede comprobarse que su diferencia es constante:

$$\frac{2}{2\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2(2x+1)}{3\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{4}{3}\,.$$

*Ejemplo 2*. En el caso

$$\int \frac{x}{\sqrt{12+4x-x^2}}dx,$$

operando como antes,

$$12+4x-x^2=16-(x-2)^2;\ x-2=4\,sen\,t,\ 12+4x-x^2=16\cos^2 t,\ dx=4\cos t\,dt;$$

$$\int \frac{2+4\,sen\,t}{4\cos t}4\cos t\,dt=2t-4\cos t;\ t=arcsen\frac{x-2}{4},\ \cos t=\frac{\sqrt{12+4x-x^2}}{4},$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{12+4x-x^2}}dx=2\,arcsen\frac{x-2}{4}-\sqrt{12+4x-x^2}.$$

Los dos ejemplos muestran que, en el cálculo de $\int f_r\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, el método que acabamos de ver puede tener gran ventaja sobre el expuesto más arriba.

# ÍNDICE

## I - La integral simple



## II - Integrales impropias



## III - Aplicaciones geométricas de la integral simple

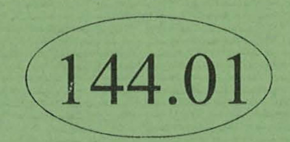


## IV - Integración numérica



## Apéndice - Cálculo de primitivas

CUADERNO




CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
info@mairea-libros.com

